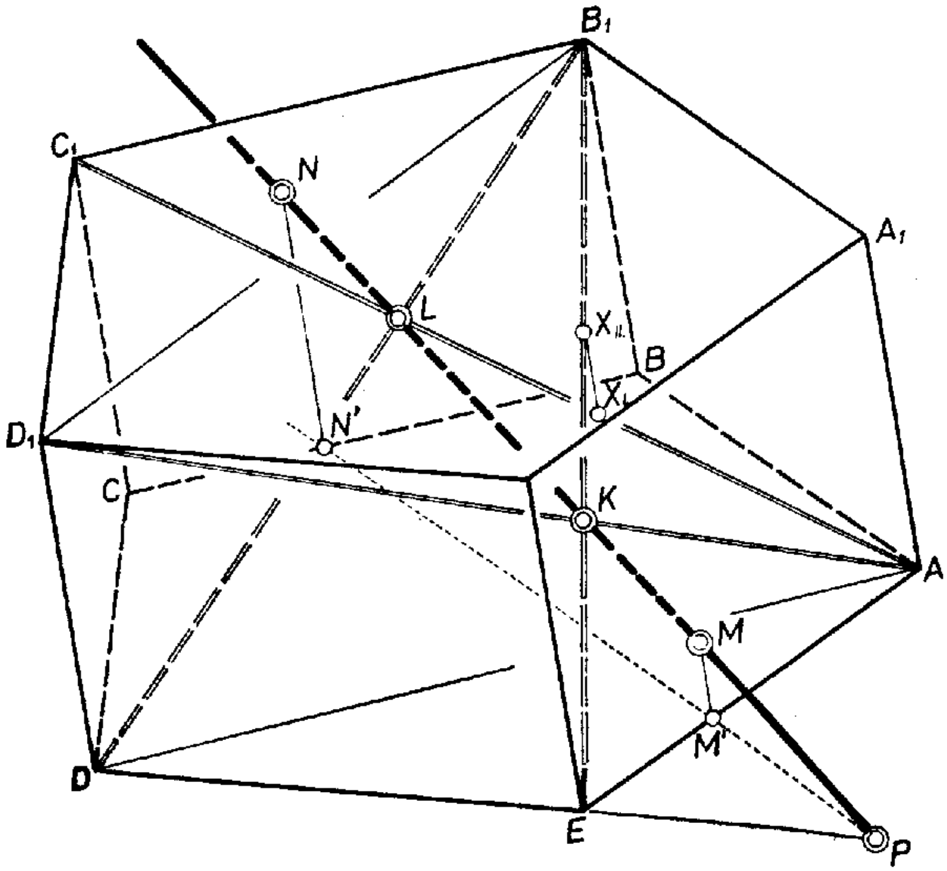
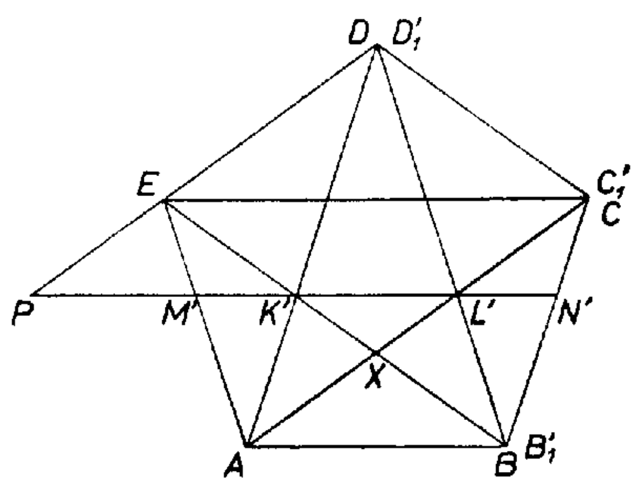
A C_1AD_1 és DB_1E útvonalak első, valamint második szakaszai páronként metszik egymást (1. ábra).



1. ábra

Valóban, a C_1A és a DB_1 szakasz négy végpontja egy síkban van, mert a szabályos ötszög tengelyes szimmetriája alapján $C_1B_1 \parallel D_1A_1 \parallel DA$, a két útszakasz a konvex ADC_1B_1 trapéz két átlója, így a hasáb egy belső L pontjában metszik egymást. Hasonlóan az AD_1 és B_1E útszakaszok az AED_1B_1 konvex trapéz átlói, K metszéspontjuk a két útvonal második közös pontja. Abból is kiadódik ez, hogy az AED_1B_1 és az előbbi ADC_1B_1 négyszög egymásba megy át, hasábunk két szimmetriaműveletével, az oldalélek közös felező merőleges síkján való tükrözéssel AED_1B_1 átmegy A_1E_1DB-be, ez pedig a hasáb hossztengelye körüli, a betűsorrend irányában való $2 \cdot \dfrac{360°}{5} = 144°$-os elfordítással C_1B_1AD-be.

Az L és K metszéspontoknak a hasáb alapján levő L', K' merőleges vetülete természetesen a CA, DB, illetve AD, BE átlópár metszéspontja, a továbbiak céljára ezektől fogjuk mérni a metszéspontoknak az alapsík fölötti magasságát (2. ábra).



2. ábra

Előbb azonban ugyancsak a vetületek alapján belátjuk, hogy a két útvonalnak nincs további közös pontja, és így egyértelműen a KL egyenest kell tovább vizsgálnunk.

A két vetületnek további közös pontjai a D csúcs, valamint az AC, BE átlók X metszéspontja. D-ben csak fedi egymást a két útvonal, ha felülről nézzük őket, hiszen az I. útvonal D_1-ben, a II. pedig D-ben végződik, magasságkülönbségük a hasáb m magassága. Ugyanígy az X fölötti X_{I} és X_{II} pontok is különbözők, hiszen $AX < XC$ miatt X_{I} közelebb van az A-hoz, mint C_1-hez, tehát az alapsíktól való távolsága kisebb, mint amennyire a fedőlaptól van, viszont $BX < XE$ miatt hasonlóan X_{II} a fedőlaphoz van közelebb.

Az előbbi AED_1B_1 és C_1B_1AD trapézok a látottak szerint egybevágók, a párhuzamos oldalak megfelelő párjaiból az egyik az alaplapon, a másik a fedőlapon van, tehát L ugyanakkora távolságra van a fedőlaptól, mint a K az alaplaptól. K-nak az alaplaptól és a fedőlaptól mért KK' és KK'' távolságainak aránya egyenlő az AD_1 átló szeleteinek $KA : KD_1$ arányával, ez tovább egyenlő az alapok $AE : D_1B_1 = AE : DB$ arányával, és ez, mint ismeretes, $1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Így K-nak és L-nek az alaplap fölötti magassága

$$K'K = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cdot m = \frac{3-\sqrt{5}}{2} m = 0{,}382\ m,$$

$$L'L = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}} m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} m = 0{,}618\ m,$$

tehát a vizsgálandó LK egyenes mentén L-től K-ig a magasságesés $(\sqrt{5}-2)m = 0{,}236\ m$.

E méretekből a 2. ábra alapján látjuk, hogy egyenesünk lefelé haladva az AEE_1A_1 oldallap egy M pontján át lép ki a hasábból, fölfelé pedig a BCC_1B_1 oldallap egy N pontján át, az AE, BC alapél M', illetve N' pontja fölött, amelyeket a $K'L'$ egyenes metsz ki. Valóban, az $M'AK'$ és az $AK'L'$ háromszögek egyenlő szárúak, és $M'AK'\sphericalangle < AK'M'\sphericalangle$, így $M'K' < K'A = K'L'$, tehát egyenesünknek az $M'K'$ szakasz fölötti esése kisebb $(\sqrt{5}-2)m$-nél, ez viszont kisebb $K'K$-nál, és ugyanez áll az $L'N'$-re, illetve a fölötte L-től N-ig bekövetkező emelkedésre.

A KM esést (és LN emelkedést) ki is számíthatjuk. Ismeretes, hogy a $36°$ szárszögű $AK'M'$ háromszögben az alap a szárnak $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$-szerese:

$$K'M' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AK' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} K'L',$$

tehát a KM menti esés, valamint M-nek M' fölötti és N-nek N' fölötti magassága

$$\frac{K'M'}{L'K'}(\sqrt{5}-2)\,m = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} m = \frac{m}{2}\left(\sqrt{49}-\sqrt{45}\right) > 0,$$

$$M'M = K'K - \frac{7-3\sqrt{5}}{2} m = (\sqrt{5}-2)\,m = 0{,}236\ m,$$

$$N'N = m - M'M = (3-\sqrt{5})m = 0{,}764\ m.$$

Végül felhasználjuk, hogy $AM' = BN' = K'L' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} DK' = 0{,}618\ CB$, így N a BCC_1B_1 oldallapnak BB_1-től $0{,}618 \cdot BC$-re, BC-től $0{,}764 \cdot BB_1$-re levő pontja, M pedig az AEE_1A_1 oldallapnak AA_1-től $0{,}618 \cdot AE$-re, AE-től $0{,}236 \cdot AA_1$-re levő pontja.

Megjegyzések. 1. Megállapításaink akkor is érvényesek, ha a hasáb ferde, mert a vetületből felhasznált tények érvényesek oldalélirányú vetítés mellett is.

2. Érdekes eredményt kapunk, ha az LK egyenesnek az alaplap síkján való döféspontját tekintjük. Az LP szakaszon az esés LL', tehát

$$L'P = \frac{L'K'}{(\sqrt{5}-2)m} \cdot L'L = \frac{\sqrt{5}+1}{2} AB = CE,$$

így $L'PEC$ paralelogramma, tehát P a DE alapél meghosszabbításának a $K'L'$ egyenessel való metszéspontja.