A dolgok elbonyolítása a matematikai feladatmegoldás természetes velejárója. A problémák megoldása során általában nem rögtön a legegyszerűbb utat járjuk be, hanem gondolataink sokszori vargabetűje után érünk csak célhoz. Később persze megpróbáljuk a megoldást csiszolni, a lényeges lépéseket kihámozni, esetleg rövidebb utat keresni. Azonban egy szép, letisztult megoldást is csak akkor tudunk igazán megbecsülni, ha előtte keményen megdolgoztunk és megszenvedtünk egy „csúnyáért”.

Természetesen általában nem a bonyolult, hanem az egyszerű megoldásokra törekszünk. Ezzel együtt egy elbonyolításnak szerencsés esetben lehet olyan haszna, hogy így véletlenül egy új és hatékony módszert fedezünk fel, amely egyébként rejtve maradt volna; az adott feladat megoldásához erre a módszerre ugyan nem lett volna szükség, de valamely más kérdésnél csakis ennek segítségével boldogulhatunk.

Néha azonban még az is kifejezetten hasznos, ha valamit *szándékosan* bonyolítunk el. A bonyolult megoldást ugyanis az egyszerűvel összevetve kezelhetetlennek látszó kifejezésekre sikerül egyszerű alakot találnunk.

Az alábbi kifejezések legtöbbje úgy keletkezett, hogy egy problémát szándékoltan nagyon-nagyon ügyetlenül oldottunk meg. Az „ügyes” megoldással szemben megkaphatjuk ezeknek a kifejezéseknek az egyszerűbb alakját. Az igazi nehézség természetesen annak a felismerése, hogy a szóban forgó kifejezés melyik probléma „elbonyolításából” származik. Egyes feladatoknál ugyan nem pontosan ez a helyzet, de valamennyi megoldásnak a kulcsa valamely probléma kétféle megoldásának az összevetése.

A feladatok a matematika különböző területeire vezetnek el (kombinatorika, albegra, analízis, számelmélet, valószínűségszámítás); a megadott kifejezésekről azonban nem mindig könnyű ráismerni még a megfelelő témakörre sem. Maguk a feladatok is változó nehézségűek, néhánynak a megoldása komolyabb előkészítést és/vagy előismeretet igényel. Ezért senki se keseredjel el, he egyesekkel egyáltalán nem boldogul. A feladatok kitűzése után némi általános útmutatást adunk, azonban ez is csak minimális fogódzót jelent. A megoldásokat a következő számban közöljük.

Addig is mindenkinek jó szórakozást és eredményes elbonyolítást kívánunk.

1. a)

$$\binom{k}{0}\binom{n}{r}+\binom{k}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{k}{2}\binom{n}{r-2}+\dots+\binom{k}{r}\binom{n}{0}=?$$

b)

$$\binom{0}{k}\binom{r}{n}+\binom{1}{k}\binom{r-1}{n}+\binom{2}{k}\binom{r-2}{n}+\dots+\binom{r}{k}\binom{0}{n}=?$$

(Ha $0\le j<t$, akkor $\binom{j}{t}=0$. $\binom{0}{0}$ értéke definínió szerint 1.)

2. a)

$$k^k-\binom{k}{1}(k-1)^k+\binom{k}{2}(k-2)^k-\binom{k}{3}(k-3)^k+\dots=?$$

b)

$$k^{k-1}-\binom{k}{1}(k-1)^{k-1}+\binom{k}{2}(k-2)^{k-1}-\binom{k}{3}(k-3)^{k-1}+\dots=?$$

c)

$$k^{k+1}-\binom{k}{1}(k-1)^{k+1}+\binom{k}{2}(k-2)^{k+1}-\binom{k}{3}(k-3)^{k+1}+\dots=?$$

d)

$$\binom{k+n-1}{n}-\binom{k}{1}\binom{k+n-2}{n}+\binom{k}{2}\binom{k+n-3}{n}-\binom{k}{3}\binom{k+n-4}{n}+\dots=?$$

3. a)

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\dots=?$$

b)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{7}+\dots=?$$

c)

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^n\sin\frac{n\pi}{5}+\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)^n\sin\frac{2n\pi}{5}+\dots+\left(\cos\frac{5\pi}{5}\right)^n\sin\frac{5n\pi}{5}=?$$

4.

$$\frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_r)}+\frac{1}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_r)}+\dots+\frac{1}{(x_r-x_1)(x_r-x_2)\dots(x_r-x_{r-1})}=?$$

5.

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{5}{12}\right)^{n-2k}=?$$

(A $\sum$ jel azt jelenti, hogy a mögötte álló kifejezés értékét a megadott k értékekre kell összegezni. $\lfloor z\rfloor$ a z szám (alsó) egész részét jelöli.)

6. Legyen $d(n)$ az n pozitív osztóinak a száma, $\varphi(n)$ az $1,2,\ldots,n$ számok között az n-hez relatív prímek száma, és $\mu(n)$ a Möbius-függvény: $\mu(1)=1$, $\mu(2)=(-1)^r$, ha az n szám r különböző prím szorzata és minden más esetben $\mu(n)=0$.

a)

$$\sum_{n=1}\infty\frac{d(n)}{n^2}=?$$

b)

$$\sum_{n=1}\infty\frac{\varphi(n)}{2^n-1}=?$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor=?\quad(x>1)$$

7.

$$1-1/3+1/5-1/7+\cdots=?$$

8.

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n-1}{n}\binom{n}{1}+\binom{2n-2}{n}\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{2n-n}{n}\binom{n}{n}=?$$

Útmutatás az elbonyolításhoz

Az alábbiakban nem konkrét útmutatásokat adunk a feladatokhoz, hanem inkább röviden jelzünk néhány olyan fogalmat, tételt, ill. módszert, amely hasznos lehet és esetleg jó ötleteket sugallhat.

A) *Logikai szitaformula*

Egy N elemű H halmaz részhalmazai $H_1,H_2,\ldots H_t$. Jelölje N_i a H_i elemszámát, N_{ij} a $H_i\cap H_j$ metszet elemszámát, N_{ijk} a $H_i\cap H_j\cap H_k$ elemszámát stb. Ekkor az alábbi képlet megadja azon elemek számát, amelyeket egyetlen H_i sem tartalmaz:

$$N-N_1-\cdots-N_t+N_{12}+N_{13}+\cdots+N_{t-1,t}-N_{123}-\cdots+(-1)^tN_{12\ldots t}.$$

B) *Komlpex számok*

(i) A komplex számok hatványozásánál általában a trigonometrikus alak ad egyszerű eredményt, de remek elbonyolításra nyújt lehetőséget a binomiális tétel.

(ii) Nagyon szép azonosságok érvényesek azokra a komplex számokra, amelyek k-adik hatványa 1, ezek a k-adik egységgyökök: $\varrho_j=\cos\dfrac{2j\pi}{k}+i\sin\dfrac{2j\pi}{k}$, $j=1,2,\ldots,k$. A k-adik egységgyökök r-edik hatványainak az összege k, ha $k|r$ és 0 minden más r esetén. Ennek igazolásához írjuk be a $\varrho_j=\varrho_1^j$ alakot, és használjuk a mértani sor összegképletét; ha $k\nmid r$, akkor

$$\varrho_1^r+\varrho_2^r+\cdots+\varrho_k^r=\varrho_1^r+\varrho_1^{2r}+\cdots+\varrho_1^{kr}=\varrho_1^r\cdot\frac{\varrho_1^{kr}-1}{\varrho_1^r-1}=0,$$

hiszen $\varrho_1^k=1$. Ha $k\mid r$, akkor az összeg minden tagja 1, tehát ekkor az összeg értéke k.

C) *Rekurziók*

A legegyszerűbb típusú lineáris rekurzió egy olyan $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ végtelen sorozat, ahol $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$ minden $n\geq 2$-re. Legismertebb példa erre a Fibonacci-számok, ahol $a_0=0$, $a_1=1$, $\alpha=\beta=1$. Egy ilyen rekurzió megoldása $a_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n$ alakú, ahol x_1 és x_2 az $x^2-\alpha x-\beta=0$ egyenlet *különböző* gyökei, c_1 és c_2 pedig a kezdeti a_0 és a_1 értékeiből határozhatók meg (részletesen lásd pl. Poros Tibor cikkében, KöMaL 1993/8–9).

D) *Végtelen összegek*

A végtelen sorokkal általában vigyázni kell, mert a viselkedésük alapvetően megváltozhat, az a végesben megszokott szabályokat próbáljuk rájuk alkalmazni, pl. a tagok átrendezése vagy két sor „kézenfekvően adódó” összeszorzása általában nem megengedett. Azonben *abszolút* konvergens sorokkal, azaz olyanokkal, amelyekben a tagok abszolút értékeiből képzett sor is konvergens, teljesen ugyanúgy bánhatunk, mintha véges összegek lennének: két ilyen sort úgy szorzunk össze, hogy „minden tagot minden taggal" megszorzunk, és a kapott végtelen összeget tetszés szerint csoportosíthatjuk.

Az egyik legismertebb végtelen sor a négyzetszámok reciprokösszege, amelynek értéke $\pi^2/6$. A mai cikket egy ehhez kapcsolódó történeti áttekintéssel zárjuk. Már Euler megmutatta a XVIII. században, hogy hasonló típusú formula érvényes minden páros kitevőjű hatványra is, ugyanakkor érdekes módon a páratlan kitevőjű hatványok reciprokösszegére ma sem ismeretes pontos képlet, sőt a köbszámoktól eltekintve azt sem tudjuk, hogy a szóban forgó reciprokösszeg irracionális-e vagy sem. A köbszámok reciprokösszegéről is csak 1978-ban(!) igazolta *Apéry* francia matematikus, hogy irracionális. Kár, hogy ezek az összegek csak bonyolultak és (minden bizonnyal) nem valami egyszerűnek az elbonyolított változatai.

Freud Róbert