Márciusi feladványunk beküldői közül a FORTUNA magazin 1 éves előfizetését nyerte

Csere Kálmán balatonboglári olvasónk.

Áprilisi játékunk a „Ki nevet a végén" volt: Mekkora eséllyel fogunk pontosan a 100. mezőre lépni, ha egy dobókockával játszunk (és eltekintünk a kiütéstől)?

Egyetlen helyes megoldónk *Bereczkiné Székely Erzsébet* volt. Megoldása:

Jelölje P_n annak az esélyét, hogy az n. mezőre rálépünk. Hogyan következhet ez be? Az utolsó dobástól függően 6 eset lehetséges, mindegyik egyforma eséllyel, ha a kockánk „szabályos". Eszerint, a teljes valószínűség tételét felhasználva az alábbi rekurzív összefüggést írhatjuk fel:

$$p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}p_{n-2} + \frac{1}{6}p_{n-3} + \frac{1}{6}p_{n-4} + \frac{1}{6}p_{n-5} + \frac{1}{6}p_{n-6}.$$

Ha tehát az első hat mező esélyét fel tudnánk írni, akkor utána ez az összefüggés már meghatározza az összes többi mezőre lépés esélyét.

$p_1 = \frac{1}{6}$, hiszen csak akkor lépek az első mezőre, ha 1-est dobok.

$p_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{6}$, hiszen vagy egy ugrással (2-est dobok), vagy két 1-es dobással lehet ezt a mezőt elérni.

$p_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{36} + \frac{1}{216} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2, \ldots$, általában

$p_i = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{i-1}$, ahol $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Ezután egy számítógéppel pillanatok alatt meg lehet határozni, hogy $p_{100} \approx 0,28571$, azaz $\approx 2/7$.

Minél nagyobb a mező sorszáma, annál közelebb lesz p_n a 2/7-hez, ez lesz a p_n sorozat határértéke.

Vancsó Ödön

⋆

Megjegyzés. Érdeklődő olvasóink kedvéért vázoljuk annak bizonyítását, hogy a $\{p_n\}$ sorozat 2/7-hez tart. A bizonyítás a lineáris rekurzív sorozatok általános képletére épít, de a lépések e tétel nélkül is elvégezhetők teljes indukcióval.

A $\{p_n\}$ sorozat egy úgynevezett lineáris rekurzív sorozat, amelyre teljesül a

$$p_{n+6} - \frac{1}{6}p_{n+5} - \frac{1}{6}p_{n+4} - \frac{1}{6}p_{n+3} - \frac{1}{6}p_{n+2} - \frac{1}{6}p_{n+1} - \frac{1}{6}p_n = 0$$

azonosság. Ismeretes, hogy egy ilyen sorozat n-edik tagját explicit alakban a

$$p(x) = x^6 - \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$$

polinom gyökeinek segítségével lehet felírni. Ezt a polinomot a sorozat karakterisztikus polinomjának is nevezik. Ha a polinom (valós és komplex) gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_k$, multiplicitásuk $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, azaz a polinom gyöktényezős alakja

$$(x - z_1)^{\alpha_1}(x - z_2)^{\alpha_2}\ldots(x - z_k)^{\alpha_k},$$

akkor a sorozat n-edik eleme

(1) $$p_n = a_1(n)z_1^n + a_2(n)z_2^n + \cdots + a_k(n)z_k^n$$

alakú, akol $a_i(n)$ valamilyen α_i-nél alacsonyabb fokú polinom, és megfordítva: ha a sorozat ilyen alakú, akkor teljesül rá a rekurzió.

Esetünkben p egyik gyöke (legyen ez z_1) az 1, és ez egyszeres gyök:

$$p(x) = (x-1)\left(x^5 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{3}{6}x^2 + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6}\right).$$

A többi gyök 1-nél kisebb abszolút értékű, mert $|x| \geq 1$ esetén $|p(x)| \geq |x|^6 - |x|^5 \geq 0$, és egyenlőség csak akkor van, ha $x = 1$. Mindezekből következik, hogy a_1 konstans polinom, és (1) többi tagja 0-hoz tart. A feladat tehát a_1 meghatározása lehetőleg a többi gyök kiszámítása nélkül (ami gyakorlatilag lehetetlen).

Legyen $q_n = a_2(n)z_2^2 + \cdots + a_k(n)z_k^2 = p_n - a_1$. Erre a sorozatra a fentiek szerint teljesül a $q_{n+5} + \frac{5}{6}q_{n+4} + \frac{4}{6}q_{n+3} + \frac{3}{6}q_{n+2} + \frac{2}{6}q_{n+1} + \frac{1}{6}q_n = 0$ rekurzió. Mivel $p_1 = \frac{1}{6}$, $p_2 = \frac{7}{36}$, $p_3 = \frac{49}{216}$, $p_4 = \frac{343}{1296}$, $p_5 = \frac{2401}{7776}$, $p_6 = \frac{16807}{46656}$, ebből egy egyenletet kapunk a_1-re:

$$\left(\frac{16807}{46656}-a_1\right)+\frac{5}{6}\left(\frac{2401}{7776}-a_1\right)+\frac{4}{6}\left(\frac{343}{1296}-a_1\right)+$$
$$+\frac{3}{6}\left(\frac{49}{216}-a_1\right)+\frac{2}{6}\left(\frac{7}{36}-a_1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-a_1\right)=0$$

Rendezve: $1-\frac{7}{2}a_1=0$, azaz $a_1=\frac{2}{7}$.

Ha nem akarunk törtekkel számolni, a sorozatot visszafelé, nem povitív indexekre is kiterjeszthetjük:

$$p_0=1,\quad p_{-1}=p_{-2}=p_{-3}=p_{-4}=p_{-5}=0,$$

és ezáltal

$$(1-a_1)+\frac{5}{6}(0-a_1)+\frac{4}{6}(0-a_1)+\frac{3}{6}(0-a_1)+\frac{2}{6}(0-a_1)+\frac{1}{6}(0-a_1)=1-\frac{7}{2}a_1=0.$$

Most megbecsülhetjük a konvergencia sebességét. Mivel

$$\left(x-\frac{4}{5}\right)\left(x^5+\frac{5}{6}x^4+\frac{4}{6}x^3+\frac{3}{6}x^2+\frac{2}{6}x+\frac{1}{6}\right)=x^6+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{30}x^3-\frac{2}{30}x^2-\frac{3}{30}x-\frac{4}{30},$$

a $\{q_n\}$ sorozatra teljesül a

$$q_{n+6}+\frac{1}{30}q_{n+5}-\frac{1}{30}q_{n+3}-\frac{2}{30}q_{n+2}-\frac{3}{30}q_{n+1}-\frac{4}{30}q_n=0$$

rekurzió. Következésképp a $|q_{n+6}|\le\frac{11}{30}\max(|q_n|,|q_{n+1}|,\dots,|q_{n+s}|)$, amiből nem nehéz teljes indukcióval bebizonyítani, hogy $\left|p_n-\frac{2}{7}\right|=|q_n|<\left(\frac{11}{30}\right)^{\frac{n}{6}}$. Ezzel például p_{100}-ra az $\left|p_{100}-\frac{2}{7}\right|<\left(\frac{11}{30}\right)^{\frac{50}{3}}<10^{-7}$ becslést kapjuk, azaz p_{100} már csak a 8-adik tizedesjegyben térhet el a 2/7-től.

⋆

Arra, hogy a sorozat határértéke miért éppen 2/7, nem nehéz heurisztikus meggondolást adni. A lépések egyforma valószínűséggel 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 hosszúságúak, egy „átlagos” lépés hossza tehát 3,5. Ez pedig azt jelenti, hogy a mezőknek „átlagosan” a $\frac{2}{7}$ részére lépünk rá, tehát egy mezőre körülbelül $\frac{2}{7}$ valószínűséggel.

Kós Géza