1. Az ABC háromszögben adott két oldal és a rövidebb oldallal szemközti szög. Legyen $AC = x$ és alkalmazzuk a koszinusztételt.

$$81 = x^2 + 100 - 2 \cdot x \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ,$$

ahonnan $x^2 - 10x + 19 = 0$, $x_1 = 5 + \sqrt{6}$, $x_2 = 5 - \sqrt{6}$. A feltételeknek két háromszög felel meg, az egyikben $AC = 5 + \sqrt{6} \approx 7,45$ egység, a másikban $AC = 5 - \sqrt{6} \approx 2,55$ egység.

2. Legyen x_1 a közös gyök, a további gyökök x_2, illetve x_3. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -3p, \\ x_1 x_2 &= q \end{aligned} \qquad \text{illetve} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= -p, \\ x_1 x_3 &= -q. \end{aligned}$$

Innen $x_1(x_2 + x_3) = 0$, azaz $x_2 + x_3 = 0$ vagy $x_1 = 0$. Ez utóbbi esetben $x_2 = -3p$, $x_3 = -p$, így valóban $x_2 = 3x_3$.

3. Az egyenletnek csak olyan megoldása lehet, ahol $\cos 2x \leq 0$. Rendezzük át az egyenletet, majd emeljünk négyzetre.

$$\sqrt{\frac{1 - \sin 2x}{2}} = -\cos 2x, \qquad 1 - \sin 2x = 2\left(1 - \sin^2 2x\right),$$

$$2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0; \qquad \sin 2x = 1 \quad \text{vagy} \quad \sin 2x = -\frac{1}{2}.$$

Ha $\sin 2x = 1$, akkor $\cos 2x = 0$ és ez megoldás, $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_{1,k} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
ha $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ és $\cos 2x \leq 0$, akkor $2x = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$, $x_{2,n} = \frac{7\pi}{12} + n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, és ezek is megoldások.

4. Legyen a beírt kör középpontja O, a BC oldal felezőpontja A_1, az $AA_1 (= m)$ magasság a beírt kört még az A_2 pontban metszi; az A_2 pontban a beírt körhöz húzott érintő az adott háromszögből egy hozzá hasonló háromszöget metsz le. A szóban forgó kör e háromszög beírt köre, sugarát jelölje ϱ_1, magasságát $AA_2 = m_1$.

Mivel BO az ABA_1 háromszög belső szögfelezője és $\frac{BA_1}{OA_1} = \frac{3}{2}$, azért $\frac{BA}{OA} = \frac{3}{2}$. Legyen $BA = 3x$, $OA = 2x$. Az ABA_1 derékszögű háromszögből:

$$(3x)^2 = \left(\frac{27}{2}\right)^2 + (2x + 9)^2, \qquad 5x^2 - 36x - \frac{1053}{4} = 0,$$

s mivel $x > 0$, $x = 11,7$, $2x = 23,4$ egység. $AA_1 = m = 32,4$, $AA_2 = m_1 = 14,4$ egység. A hasonlóság miatt

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{m_1}{m}, \qquad \varrho_1 = 9 \cdot \frac{14,4}{32,4} = 4.$$

A köt sugara $\varrho_1 = 4$ egység.

5. a) A két kör középpontja $K_1(2; -1)$, illetve $K_2(5; 5)$. Az egyik közös külső érintő a köröket az E_1, illetve E_2 pontokban érinti. A körök külső érintőinek metszéspontját jelölje H, ez a körök *külső* hasonlósági pontja. A HK_1E_1 háromszög hasonló a HK_2E_2 háromszöghöz, a hasonlóság aránya a sugarak arányával egyezik meg, tehát $4:1$, azaz $\frac{K_1K_2}{K_2H} = 3$.

Mivel $\overrightarrow{K_1K_2} = (3; 6)$, azért $\overrightarrow{K_2H} = \frac{1}{3}\overrightarrow{K_1K_2} = (1; 2)$ és $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK_2} + \overrightarrow{K_2H} = (5; 5) + (1; 2) = (6; 7)$, tehát $H(6; 7)$.

b) A H ponton átmenő egyenesek közül azok lesznek közös érintők, amelyek valamelyik kör középpontjától sugár távolságban haladnak. A H ponton átmenő egyenesek egyenlete $Ax + By - 6A - 7B = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$ alakban írható. Így

$$1 = \frac{|5A + 5B - 6A - 7B|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ahonnan $B = 0$, $A = 1$, illetve $A = 3$, $B = -4$ megfelel.
A két érintő egyenlete: $x = 6$, illetve $3x - 4y + 10 = 0$.

6. Jelölje a sorozatok első elemét a, különbségét d. A feltétel szerint $\frac{S_{6n}}{S_{2n}} = K$, azaz

$$\frac{6n}{2}(2a + (6n - 1)d) = K \cdot \frac{2n}{2}(2a + (2n - 1)d).$$

Ekvivalens átalakítások után

$$2nd(K - 9) = (2a - d)(3 - K).$$

Ha $K = \frac{S_{6n}}{S_{2n}}$ állandó, akkor n-től független. Ez akkor teljesül, ha
1) $d = 0$ $(a \neq 0)$, $K = 3$, azaz a sorozat minden eleme a;
2) $d = 2a \neq 0$, $K = 9$, azaz az $a, 3a, 5a, \ldots$ sorozat.
Lássuk be, hogy mindkettő megfelel a feltételeknek!

7. Mivel $\log_3(2 \cdot 3^x) = -\log_{\frac{1}{3}}(2 \cdot 3^x)$, azért

$$\log_{\frac{1}{3}}(9^x + a) = \log_{\frac{1}{3}}(2 \cdot 3^x).$$

Az $\frac{1}{3}$ alapú logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt

$$9^x + a = 2 \cdot 3^x,$$
$$9^x - 2 \cdot 3^x + a = 0.$$

E 3^x-re másodfokú egyenlet diszkriminánsa $D = 4(1 - a)$. Ha $D < 0$, azaz $a > 1$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.
ha $D = 0$, azaz $a = 1$, akkor $(3^x - 1)^2 = 0$; ekkor az egyenletnek egyetlen megoldása van: $x_0 = 0$;
ha $D > 0$, azaz $a < 1$, akkor $3^x = 1 \pm \sqrt{1-a}$;
$3^x = 1 + \sqrt{1-a}$, $x_1 = \log_3\left(1 + \sqrt{1-a}\right)$ minden $a < 1$ esetén megoldás, míg
$3^x = 1 - \sqrt{1-a}$, $x_2 = \log_3\left(1 - \sqrt{1-a}\right)$ $0 < a < 1$ esetén megoldás.

8.

$$\frac{\pi}{3}\left(x - \sqrt{x^2 - 3x - 12}\right) = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$
$$x - \sqrt{x^2 - 3x - 12} = 3k,$$
$$x - 3k = \sqrt{x^2 - 3x - 12},$$

ezért az $x^2 - 3x - 12 \geq 0$ és az $x - 3k \geq 0$ feltételeknek kell teljesülni.

$$x^2 - 6kx + 9k^2 = x^2 - 3x - 12,$$

ahonnan

$$x = \frac{3k^2 + 4}{2k - 1}.$$

Azonos átalakításokkal

$$x = \frac{1}{4}\left(6k + 3 + \frac{19}{2k - 1}\right),$$

tehát $2k - 1$ osztója 19-nek.

Ha $2k - 1 = 1$, azaz $k = 1$, akkor $x = 7$, és ez megoldás, ha $2k - 1 = -1$ vagy $2k - 1 = 19$, akkor $x = -4$ vagy $x = 16$, és ezek *nem* megoldások, ha pedig $2k - 1 = -19$, $k = -9$, akkor $x = -13$, és ez is megoldás. Az egyenletnek tehát két egész megoldása van: $x = 7$ és $x = -13$.

Rábai Imre