Bevezető

A Bolyai János Matematikai Társulat Csongrád megyei tagozata idén 32. alkalommal szervezte meg a Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékversenyt középiskolás tanulók számára. A verseny három fordulós, mindegyik fordulóban hat, évfolyamonként különböző feladatból álló feladatsort kapnak kézhez a versenyezni kívánó tanulók.

Az első két forduló feladatainak megoldására mintegy másfél-két hónap áll rendelkezésre, az itt kitűzött feladatokon a versenyzők otthon dolgozhatnak, egyes problémák kapcsán önálló kutatásokat végezhetnek. (A versenybizottság tagjai úgy gondolják és tapasztalják, hogy a diákok ilyen jellegű tevékenysége nagyon hasznos és eredményes.) A megoldásokat az iskolai matematikatanárok értékelik, és az elért pontszámok összesítése után javaslatot tesznek a döntőbe jutó tanulókra. A Bolyai Intézet oktatóiból és középiskolai tanárokból álló versenybizottság ezen javaslatok összesítésével alakítja ki a harmadik, döntő fordulóra meghívott tanulók névsorát. A megyénként egy helyen és azonos időben megrendezésre kerülő, négyórás döntőben elért eredmények alapján rangsorolja a bizottság a verseny helyezettjeit.

A verseny megyei versenyként indult, majd kiterjedt Bács-Kiskun és Békés megyére is. Az utóbbi években néhány dunántúli megye (Tolna, Vas, Veszprém, Zala) középiskolái is benevezték tanulóikat. További ösztönzést adhat a versenyen való részvételre, hogy a József Attila Tudományegyetem Természettudományi Karán a felvételivel kapcsolatos kedvezmények sorába bekerült a Szőkefalvi-Nagy Gyula Versenyen elért eredmény is.

Meg kell még említenünk egy nagyon fontos tényt. Ez a verseny már régen nem létezne tanár kollégáink pozitív hozzáállása és önzetlen segítsége nélkül. Ez nemcsak a verseny népszerűsítésében, a tanulók ösztönzésében és támogatásában, a dolgozatok javításában nyilvánul meg, hanem abban is, hogy az utóbbi években a feladatok kitűzését is egy-egy középiskola matematika munkaközössége vállalta magára. Bár az idei verseny feladatsorait a versenybizottság tagjai állították össze, már több iskola is jelezte, hogy a következő években szívesen vállalná ezt a feladatot.

Az 1994. március 25-én megrendezett döntő feladatai

I. osztály

1. Keressük meg azokat az egész számokat, amelyek négyzetét 13 és 31 szorzatához adva négyzetszámot kapunk! Általánosítsuk a feladatot!

2. Van-e megoldása az

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

egyenletnek, ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív egész számok, és $n \geq 1$ egész szám?

3. Kössük össze az $ABCD$ paralelogramma A csúcsát a CD, B csúcsát az AD, C csúcsát az AB és D csúcsát a BC oldal felezőpontjával. E négy szakasz megfelelő metszéspontjai által meghatározott négyszög területe milyen kapcsolatban van az $ABCD$ paralelogramma területével?

4. Egy konvex négyszöget az átlói négy háromszögre vágnak szét. Tudjuk, hogy e négy háromszögbe beírt körök sugarai egyenlők. Igaz-e, hogy a négyszög rombusz?

5. Melyik az a legnagyobb páratlan pozitív egész szám, amelyik nem állítható elő három, páronként különböző összetett pozitív egész szám összegeként?

6. Legalább hány csoportba kell beosztanunk az első 1994 pozitív egész számot ahhoz, hogy egyetlen csoportban se legyen két olyan szám, amelyek egyike többszöröse a másiknak?

II. osztály

1. Van-e olyan n természetes szám, amelyre a következő tört egyszerűsíthető?

$$\frac{50n+3}{33n+2}$$

2. Adott az $ABCD$ konvex négyszög. Az AC, illetve a BD egyeneseken vegyük fel a K, illetve M pontot úgy, hogy BK és AD, valamint AM és BC párhuzamosak legyenek. Mutassuk meg, hogy KM párhuzamos CD-vel.

3. Igazoljuk, hogy ha az a, b, c valós számokra $(a+c)(a+b+c) < 0$, akkor

$$(b-c)^2 > 4a(a+b+c).$$

4. $P(x)$ negyedfokú egész együtthatós polinom. Tudjuk, hogy minden egész x esetén $P(x)$ osztható 7-tel. Igaz-e, hogy ez csak akkor teljesülhet, ha $P(x)$ minden együtthatója a 7 többszöröse?

5. Az ABC háromszög belsejében adott egy k kör úgy, hogy az AB oldalt a háromszög beírható körének érintési pontjában érinti. Az A, illetve a B csúcsból a k körhöz húzott érintők metszéspontja legyen M. Az AM egyenes messe a BC oldalt a P, a BM egyenes pedig messe az AC oldalt a Q pontban. Igazoljuk, hogy a $CQMP$ négyszög érintőnégyszög.

6. Legyenek az $a_1, a_2, \ldots a_{1994}$ és a $b_1, b_2, \ldots b_{1994}$ az 1, 2, …, 1994 számok tetszőleges permutációi. Igazoljuk, hogy az $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_{1994} b_{1994}$ számok közül mindig kiválszatható kettő, amelyek különbsége osztható 1994-gyel.[1]

[1] A verseny története során többször előfordult már, hogy hibásan megfogalmazott, vagy valamilyen szempontból nem megfelelő feladat került a kiadott feladatsorba. A feladat eredetileg az első 1996 pozitív egészre fogalmazta meg ugyanezt az állítást, és bizonyítása, lévén az 1996 néggyel osztható, nem túlságosan nehéz. A feladatsor végső formába öntésénél került az 1996 helyébe 1994, amivel az állítás igaz ugyan, de bizonyítása jóval nehezebb.

III. osztály

1. Legyenek az $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ pozitív egész számok ($n \geq 1$). Oldjuk meg az

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} = 1$$

egyenletet.

2. Mutassuk meg, hogy $\sin 2^0$ irracionális szám.

3. Legfejlebb hány darab 6×1-es téglalapot lehet elhelyezni átfedés nélkül egy 9×14-es sakktáblán a tábla oldalaival párhuzamosan?

4. Definiáljuk az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen:

$$a_1 = 1; \qquad a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \qquad (n \geq 2).$$

Igazoljuk, hogy

$$3987 < a_{1994}^2 < 5980.$$

5. a, b, c, d egy konvex négyszög oldalai, m és n az átlói. α és γ két átellenes belső szög. Bizonyítsuk be, hogy

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\alpha + \gamma).$$

6. Azonos a II. osztályosok 6. feladatával.

IV. osztály

1. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$2\left(x^2 - 3x + 2\right) = 3\sqrt{x^3 + 8}$$

2. Az $ABCD$ érintőtrapéz átlóinak metszéspontja M. Legyen r_1 az ABM, r_2 a BCM, r_3 a CDM és r_4 a DAM háromszög beírható körének sugara. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

3. A valós számok halmazán értelmezett valós értékű f függvényről tudjuk, hogy van olyan T nullától különböző valós szám, hogy bármely valós x esetén

$$f(x+T) = \frac{f(x)\cos\alpha - \sin\alpha}{f(x)\sin\alpha - \cos\alpha},$$

ahol $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. Igaz-e, hogy f periodikus függvény?

4. Helyezzünk el a zárt egységkockában három pontot úgy, hogy a páronkénti távolságaik közül a legkisebb a lehető legnagyobb legyen. Mekkora ez a távolság?

5. Vannak-e olyan k, n pozitív egész számok, amelyekre

$$\sqrt{k} + \sqrt{n} = \sqrt{1994}\,?$$

6. Az A, B, C városok lakóinak mindegyike legfeljebb egy-egy embert ismer a másik két városból. Tudjuk, hogy
(1) A-ban 6000 lakos van;
(2) B azon lakosainak száma, akiknek van C-ben ismerőse, nem több 2000-nél;
(3) B-ben is és C-ben is a lakosok több, mint felének nincs ismerőse A-ben.

Bizonyítsuk be, hogy A, B és C városokban azoknak a lakosoknak a száma, akiknek a másik két városban nincs ismerősük, nem kevesebb 1994-nél.

Az 1993–94. tanévi Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny eredményei

I. osztály

I. díj:	Megyeri Csaba (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.)
II. díj:	Formanek Csaba (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
	Pintér Dömötör (Szombathely, Nagy Lajos Gimn.)
	Puskás Péter (Szombathely, Nagy Lajos Gimn.)
III. díj:	Babucs András (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
	Forrai Gábor (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn.)
	Kiss András (Gyula, Erkel F. Gimn.)
	Szépszó Gabriella (Bonyhád, Petőfi S. Evang. Gimn.)

II. osztály

I. díj: Molnár Zita (Békés, Szegedi Kis István Ref. Gimn.)
Tigyi István (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
II. díj: Almási Attila (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)
Röst Gergely (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn.)
Véber Miklós (Veszprém, Lovassy L. Gimn.)
III. díj: Tari Árpád (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

III. osztály

I. díj: Balogh Miklós (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
Duzmath Zsolt (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
II. díj: Botka Eszter (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
Nagy Katalin (Veszprém, Lovassy L. Gimn.)
III. díj: Kelemen István (Szeged, Radnóti M. Gimn)
Nagy Vilmos (Szeged, Radnóti M. Gimn.)

IV. osztály

I. díj: Dőtsch András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)
II. díj: Lengyel András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)
Zsíros Ákos (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
III. díj: Dienes Péter (Szeged, Radnóti M. Gimn.)
Hűber Erik (Bonyhád, Petőfi S. Evang. Gimn.)
Kasza Tamás (Kecskemét, Katona J. Gimn.)
Maróti Attila (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)
Megyesi Zoltán (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn.)

A díjazottakon kívül a versenybizottság még igen sok tanulót részesített dicsérő oklevélben, elismerve ezzel szép megoldásaikat, értékes gondolataikat.

Kosztolányi József