A klasszikus Pitagorasz-tétel állítása — a derékszögű háromszög befogóinak hossznégyzet-összege egyenlő az átfogó hossznégyzetével — úgy is fogalmazható, hogy a síkvektorokon értelmezett hossznégyzet függvény az egymásra merőleges vektorok összegéhez a tagokon felvett értékek összegét rendeli, vagyis a merőleges vektorpárokon összegtartó. Ez azt jelenti, hogy az E síkon (kétdimenziós eulkideszi téren) értelmezett $f : E \mapsto \mathbf{R}$, ($\mathbf{R}$ a valós számok halmaza) $f(x) = |x|^2$ függvényre

$$(1) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad x, y \in E,\ x \perp y$$

teljesül. Ha most ebben az egyenletben a függvényt tekintjük ismeretlennek, akkor azt kérdezhetjük, milyen más $f : E \mapsto \mathbf{R}$ valós függvényre teljesül még a Pitagorasz-tétel állítása a hossznégyzeten kívül? Amennyiben kiderülni, hogy lényegében nincs egyéb ilyen függvény, az a Pitagorasz-tétel egy sajátos megfordítását jelentené.

Az efféle egyenleteket, amelyekben számok vagy vektorok helyett éppenséggel a bennük előforduló függvények az ismeretlenek, *függvényegyenleteknek* szokás nevezni. Egyenletünk abból a szempontból is sajátos, hogy a változók nem minden lehetséges értékpárjára teljesül, csupán a merőleges vektorpárokra. Ezért most *feltételes* vagy *korlátozott érvényű* egyenletekről beszélünk.

Próbáljuk először f-et néhány különösen „jó” merőleges vektorpár segítségével jellemezni. Legyen ezért u és v két merőleges egységvektor E-ben. Ekkor $u + v \perp u - v$, és így (1) alapján minden $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén a következőkre jutunk:

$$\begin{aligned} f((\alpha+\beta)u) + f((\alpha-\beta)v) &= f((\alpha+\beta)u + (\alpha-\beta)v) = \\ = f(\alpha(u+v) + \beta(u-v)) &= f(\alpha(u+v)) + f(\beta(u-v)) = \\ = f(\alpha u + \alpha v) + f(\beta u - \beta v) &= f(\alpha u) + f(\alpha v) + f(\beta u) + f(-\beta v). \end{aligned}$$

Tehát az origón áthaladó u, illetve v irányvektorú egyenesekre leszűkített (valós változós) $f_u, f_v : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, az $f_u(\lambda) = f(\lambda u)$, $f_v(\mu) = f(\mu v)$ képletekkel értelmezett függvényeink egy minden $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ számpárra teljesülő, vagyis *korlátlan érvényű* egyenletnek tesznek eleget:

$$(2) \qquad f_u(\alpha+\beta) + f_v(\alpha-\beta) = f_u(\alpha) + f_u(\beta) + f_v(\alpha) + f_v(-\beta).$$

A megjelenő $-\beta$ argumentum okán sokkal többet mondhatnánk f-ről, ha ismernénk a függvény párosságát. Viszont bármely valós függvény felbontható egy páros és egy páratlan függvény összegére:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x).$$

Itt tehát g páros függvény, vagyis $g(-x) = g(x)$ minden $x \in E$-re, h pedig páratlan, vagyis $h(-x) = -h(x)$ minden $x \in E$-re. Ugyancsak egyszerű számolás mutatja, hogy mindkettő megoldása a kitűzött (1) egyenletünknek. Így azután f páratlan része, h (pontosabban h_u és h_v) szintén teljesíti a (2) egyenletet, azaz minden $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén

$$(3) \qquad h_u(\alpha+\beta) + h_v(\alpha-\beta) = h_u(\alpha) + h_u(\beta) + h_v(\alpha) + h_v(-\beta).$$

Ezután α és β szerepét felcserélve:

$$(4) \qquad h_u(\beta+\alpha) + h_v(\beta-\alpha) = h_u(\beta) + h_u(\alpha) + h_v(\beta) + h_v(-\alpha).$$

következik, majd ezeket a (3) és (4) egyenlőségeket összeadva és közben kihasználva a h_v függvény páratlan tulajdonságát, a minden $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ esetén teljesülő

$$2h_u(\alpha+\beta) = 2h_u(\alpha) + 2h_u(\beta)$$

egyenletet kapjuk. Ez azt jelenti, hogy h_u összeghez a tagokhoz rendelt értékek összegét rendeli, vagyis *összegtartó*, idegen szóval *additív*. Az additív függvények szintén egy függvényegyenlet megoldásai, mégpedig a nevezetes

$$(5) \qquad a(x+y) = a(x) + a(y)$$

Cauchy-féle egyenleté. Ezen az alapon az (1) egyenlet megoldásait *merőlegesen additív* függvényeknek mondhatjuk.

Megragadva az alkalmat, tegyünk most egy kis kitérőt, hogy az a additív függvény néhány alaptulajdonságát számba vegyük — tekintet nélkül arra, hogy az E síkon, vagy éppen az $\mathbf{R}$ számegyenesen értelmezett. Nos, ha $n \in \mathbf{N}$ egy tetszőleges természetes szám, akkor a változó minden rögzített x értékénél az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$a(2x) = a(x + x) = a(x) + a(x) = 2a(x),$$
$$a(3x) = a(2x + x) = a(2x) + a(x) = 2a(x) + a(x) = 3a(x),$$

és így tovább, egészen az

$$a(nx) = a([n - 1]x + x) = a([n - 1]x) + a(x) = (n - 1)a(x) + a(x) = na(x)$$

egyenlőségig (a pontos bizonyítás teljes indukcióval történhet). Így azután bármely $m \in \mathbf{N}$-re

$$a(x) = a\left(m\frac{x}{m}\right) = m \cdot a\left(\frac{x}{m}\right)$$

következik, és ezért

$$a\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m}a(x).$$

Ez azt jelenti, hogy minden pozitív $q = n/m$ racionális szám esetén

$$a(qx) = a\left(n\frac{x}{m}\right) = n \cdot a\left(\frac{x}{m}\right) = n\frac{1}{m}a(x) = qa(x)$$

teljesül. Mivel az $a(0) = a(0 + 0) = a(0) + a(0)$ összefüggésből $a(0) = 0$ következik, és $0 = a(0) = a(x - x) = a(x) + a(-x)$ szerint a páratlan függvény, a negatív racionális számokra is teljesül a fenti összefüggés:

$$a([-q]x) = a(-qx) = -a(qx) = -[q \cdot a(x)] = [-q]a(x).$$

Az additív függvényekre való rövid kitekintés után térjünk vissza a h függvényhez, f páratlan részéhez. Az u és v vektorok szerepének felcserélésével nyilván h_v additivitását is beláthatjuk, így azután tetszőleges $x, y \in E$ esetén az $x = \xi_1 u + \xi_2 v$, $y = \eta_1 u + \eta_2 v$ előállítások és h merőleges additivitásának segítségével számlohatunk tovább:

$$\begin{aligned}h(x + y) &= h([\xi_1 u + \xi_2 v] + [\eta_1 u + \eta_2 v]) = h([\xi_1 + \eta_1]u + [\xi_2 + \eta_2]v) = \\ &= h([\xi_1 + \eta_1]u) + h([\xi_2 + nu_2]v) = h_u(\xi_1 + \eta_1) + h_v(\xi_2 + \eta_2) = \\ &= h_u(\xi_1) + h_u(\eta_1) + h_v(\xi_2) + h_v(\eta_2) = h(\xi_1 u) + h(\xi_2 v) + h(\eta_1 u) + h(\eta_2 v) = \\ &= h(\xi_1 u + \xi_2 v) + h(\eta_1 u + \eta_2 v) = h(x) + h(y).\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy az f páratlan része mindig additív függvény, feltétel nélkül.

Lássuk most a g páros rész függvényt, amelyre szintén teljesül a korlátlan érvényű (2) egyenlet.Helyettesítsünk tehát a g-re felírt (2) egyenletbe $\alpha = \beta = \lambda$-t, illetve $\alpha = -\beta = \lambda$-t. Ekkor

$$g_u(2\lambda) + g_v(0) = 2g_u(\lambda) + 2g_v(\lambda),$$

illetve

$$g_u(0) + g_v(2\lambda) = 2g_u(\lambda) + 2g_v(\lambda),$$

amiből $g_u(2\lambda) = g_v(2\lambda)$ következik minden $\lambda \in \mathbf{R}$ esetén. Könnyen látható ugyanis, hogy egy merőlegesen additív függvény a nulla helyen eltűnik, ezért $g_u(0) = g_v(0) = 0$. Vagyis a g_u és g_v függvények azonosak. Ez viszont g párossága miatt azt jelenti, hogy a (2) egyenlet

$$g_u(\alpha + \beta) + g_v(\alpha - \beta) = 2g_u(\alpha) + 2g_v(\beta), \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R},$$

alakba írható. Vegyük észre, hogy ugyanez az egyenlőség teljesül a vektorok hossznégyzetére is, ami nem egyéb, mint a nevezetes paralelogramma egyenlőség:

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2, \qquad x, y \in E.$$

Ennek szellemében *négyzetes*, vagy idegen szóval *kvadratikus* függvényről beszélünk, ha megoldása a nevezetes

(6) $$b(x + y) + b(x - y) = 2b(x) + 2b(y)$$

Jordan-von Neumann-féle függvényegyenletnek. (Neumann János, 1903–1957, a XX. század egyik legjelentősebb magyar matematikusa, aki tudományos tevékenységét főként az Egyesült Államokban fejtette ki a játékelmélet, algebra, funkcionálanalízis, számítógéptudomány és kvantummechanika területén. Itt a belső szorzat tereket jellemző normanégyzet egyenletét idéztük P. Jordannal közös cikkéből.)

Megállapíthatjuk tehát, hogy függvényünk páros részének leszűkítése az u irányvektorú egyenesre (pontosabban g_u) kvadratikus függvény, és nyilván ugyanez érvényes $g_v = g_u$-ra is. Ezért azután ha $x = \xi_1 + \xi_2 v$ és $y = \eta_1 u + \eta_2 v$ ismét tetszőleges vektorok az E síkon, akkor g merőleges additivitását is felhasználva:

$$\begin{aligned}
g(x+y)+g(x-y) &= g((\xi_q u+\xi_2 v)+(\eta_1 u+\eta_2 v))+g((\xi_1 u+\xi_2 v)-(\eta_1 u+\eta_2 v)) = \\
&= g((\xi_1+\eta_1)u+(\xi_2+\eta_2)v)+g((\xi_1-\eta_1)u+(\xi_2-\eta_2)v) = \\
&= g((\xi_1+\eta_1)u)+g((\xi_2+\eta_2)v)+g((\xi_1-\eta_1)u)+g((\xi_2-\eta_2)v) = \\
&= g_u(\xi_1+\eta_1)+g_u(\xi_1-\eta_1)+g_v(\xi_2+\eta_2)+g_v(\xi_2-\eta_2) = \\
&= 2g_u(\xi_1)+2g_u(\eta_1)+2g_v(\xi_2)+2g_v(\eta_2) = \\
&= 2(g(\xi_1 u)+g(\xi_2 v))+2(g(\eta_1 u)+g(\eta_2 v)) = \\
&= 2g(\xi_1 u+\xi_2 v)+2g(\eta_1 u+\eta_2 v) = 2g(x)+2g(y).
\end{aligned}$$

Tehét függvényünk páros része feltétel nélkül kvadratikus az E síkon. Ezzel beláttuk első tételünket:

1. Tétel. *Ha $f : E \mapsto \mathbf{R}$ merőlegesen additív függvény, akkor egy additív és egy kvadratikus függvény összege.*

Érdekes, hogy bármennyire elemi számolással jutottunk is erre a szép eredményre, az csak a legújabb kutatások melléktermése (lásd [2]). Azt is vegyük észre, hogy számításainkban mindeddig csupán a $\lambda u \perp \mu v$ és $\lambda(u+v) \perp \mu(u-v)$ $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$ alakú merőleges vektorpárok játszottak szerepet, vagyis az (1) feltételes egyenletünk érvényét még jelentősen korlátozhatnánk anélkül, hogy igazságát vesztené tételünk.

⋆

Kitűzött feladatunk azonban még távolról sincs megoldva: az additív függvények ugyan nyilván megoldásai az (1) egyenletnek, a kvadratikusakról azonban nem mondhatjuk el ugyanezt. Tekintsük például a

$$g(\xi_1 u + \xi_2 v) = \xi_1 \xi_2, \qquad \xi_1 u + \xi_2 v \in E,$$

függvényt, amely kvadratikus, hiszen $x = \xi_1 u + \xi_2 v$, $y = \eta_1 u + \eta_2 v \in E$ esetén

$$\begin{aligned}
g(x+y)+g(x-y) &= g((\xi_1+\eta_1)u+g(\xi_2+\eta_2)v)+g((\xi_1-\eta_1)u+\xi_2-\eta_2)v) = \\
&= (\xi_1+\eta_1)(\xi_2+\eta_2)+(\xi_1-\eta_1)(\xi_2-\eta_2) = 2\xi_1\xi_2+2\eta_1\eta_2 = 2g(x)+2g(y).
\end{aligned}$$

Viszont g az egymásra merőleges u és v vektoron nem additív:

$$g(u+v) = 1\cdot 1 \neq 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = g(u)+g(v).$$

Valójában a páros megoldásokról azt is be lehet látni, hogy értékeik nem magukból a vektoroktól, hanem csak hosszuktól függnek. Ha ugyanis $x, y \in E$ és $|x| = |y|$, akkor $(x+y)/2 \perp \pm(x-y)/2$, és így a párosság felhasználásával

$$\begin{aligned}
g(x) &= g\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right) = g\left(\frac{x+y}{2}\right)+g\left(\frac{x-y}{2}\right) = \\
&= g\left(\frac{x+y}{2}\right)+g\left(\frac{-x+y}{2}\right) = g\left(\frac{x+y}{2}+\frac{-x+y}{2}\right) = g(y).
\end{aligned}$$

Persze úgy is felfoghatjuk, hogy g a vektorok hossznégyzetétől függ csupán, vagyis

$$g(x) = \gamma(|x|^2), \qquad x \in E,$$

valamely $\gamma : \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}$ függvénnyel. Viszont tetszőleges $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ esetén $\lambda u \perp \mu u$, amiből a Pitagorasz-tétel és a g merőleges additivitása alapján

$$\begin{aligned}
\gamma(\lambda^2+\mu^2) &= \gamma(|\lambda u|^2+|\mu v|^2) = \gamma(|\lambda u+\mu v|^2) = g(\lambda u+\mu v) = g(\lambda u)+g(\mu v) = \\
&= \gamma(|\lambda u|^2)+\gamma(|\mu v|^2) = \gamma(\lambda^2)+\gamma(\mu^2)
\end{aligned}$$

következik, vagyis γ additív függvény a nemnegatív valós számok $\mathbf{R}_+$ halmazán. Említést érdemel, hogy az egész számegyenesen additív függvényhez jutunk, ha γ-t páratlan függvényként terjesztjük ki $\mathbf{R}$-re. Tehát a hossznégyzet additív függvényeire pontosíthatjuk a páros, merőlegesen additív függvények leírását. Mivel egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az ilyen függvények valóban merőlegesen additívak, a következő jellemzéshez jutottunk:

2. Tétel. *Az $f : E \mapsto \mathbf{R}$ függvény pontosan akkor merőlegesn additív, ha*

$$f(x) = \gamma(|x|^2) + a(x), \qquad x \in E,$$

alakba írható, ahol $\gamma : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ és $a : E \mapsto \mathbf{R}$ additív függvények.

Látható, hogy a Pitagorasz-tétel fent említett sajátos megfordításához további feltételekre van szükség. Ilyen lehet a hossznégyzet nemnegativitásából származó

$$f(x) \geq 0, \qquad xq \in E,$$

természetes feltevés. Ekkor minden rögzített $x \in E$ esetén tetszőleges n természetes számra

$$0 \leq f\left(\frac{x}{n}\right) = \gamma\left(\left|\frac{x}{n}\right|^2\right) + a\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\gamma(|x|^2)}{n^2} + \frac{a(x)}{n}$$

és

$$0 \leq f\left(\frac{-x}{x}\right) = \gamma\left(\left|\frac{-x}{n}\right|^2\right) + a\left(\frac{-x}{n}\right) = \frac{\gamma(|x|^2)}{n^2} + \frac{-a(x)}{n}$$

teljesül, amiből

$$-\frac{\gamma(|x|^2)}{n} \leq a(x) \leq \frac{\gamma(|x|^2)}{n},$$

azaz $|a(x)| \leq \gamma(|x|^2)/n$ következik. Mivel itt n bármilyen nagyra választható, $a(x) = 0$ az egyetlen lehetőség, vagyis a megoldás páratlan része eltűnik.

Térjünk most rá a páros rész vizsgálatára. Mivel $f(x) = \gamma(|x|^2)$ nemnegatív, azért $\gamma(\lambda) \geq 0$ minden $\lambda \geq 0$ esetén. Ha γ nem azonosan nulla, akkor van olyan $\lambda_0 > 0$ szám, hogy $\gamma(\lambda_0) > 0$. Ezután megmutatjuk, hogy

$$\gamma(\varrho\lambda_0) = \varrho \cdot \gamma(\lambda_0), \qquad \varrho \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Tegyük fel ennek ellenkezőjét, vagyis hogy valamely ϱ valós szám esetén $\gamma(\varrho\lambda_0) = \sigma \cdot \gamma(\lambda_0)$, $\sigma \neq \varrho$. Ekkor ϱ és σ között választhatunk egy q racionális számot, hiszen bármely két különböző valós szám között van racionális. Így azután γ additivitását figyelembe véve

$$\sigma \cdot \gamma(\lambda_0) = \gamma(\varrho\lambda_0) = \gamma(q\lambda_0 + [\varrho - q]\lambda_0) = \gamma(q\lambda_0) + \gamma([\varrho - q]\lambda_0),$$

vagyis a $\delta = \varrho - q$ jelöléssel

$$\gamma(\delta\lambda_0) = \sigma \cdot \gamma(\lambda_0) - q \cdot \gamma(\lambda_0) = (\sigma - q) \cdot \gamma(\lambda_0).$$

Ha most $\sigma < q < \varrho$, akkor $\delta\lambda_0 > 0$-ra $\gamma(\delta\lambda_0) < 0$, ha pedig $\varrho < q < \sigma$, akkor $-\delta\lambda_0 > 0$-ra $\gamma(-\delta\lambda_0) < 0$, vagyis mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, igazolva ezzel a (7) összefüggést, amit most már a $\lambda_0 = 1$ választással átírhatunk a

$$\gamma(\lambda) = \lambda \cdot \gamma(1), \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

alakba, hiszen $\gamma(1) = \gamma((1/\lambda_0)\lambda_0) = (1/\lambda_0)\gamma(\lambda_0)$ szintén pozitív. Tehát a nemnegatív megoldások a hossznégyzet nemnegatív skalárszorsai:

$$f(x) = \gamma(|x|^2) = \gamma(1) \cdot |x|^2, \qquad x \in E.$$

(Ez nyilván akkor is érvényes, ha a γ függvény azonosan nulla.) Ezzel a Pitagorasz-tétel alábbi megfordítását bizonyítottuk:

3. Tétel. *A hossznégyzet az egyetlen olyan nemnegatív, merőlegesen additív függvény, amelynek értéke valamely egységvektoron éppen 1.*

Érdekesség, hogy Pitagorasz munkásságát követően közel 2500 évnek kellett eltelnie, mígnem valakinek eszébe jutott egy ilyen megfordítás lehetősége (lásd Gudder–Strawther [1]).

Befejezésül térjünk vissza kiinduló számításainkhoz és tegyük fel, hogy az E síkon önkényesen jelöltük ki a „merőlegesnek” tekintett vektorpárokat azzal a megkötéssel, hogy ha (x, y) a kijelöltek között van, akkor minden $(\lambda x, \mu y)$ vektorpár is ki van jelölve ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$). Ekkor azt mondjuk, hogy egy *homogén merőlegességi relációt* értelmeztünk az E síkon. Jelöljük ezt $\vdash$-vel, megkülönböztetve a szokásos merőlegességtől. Számításainkból kitűnik, hogy ha van két olyan u és v vektorunk, amelyekre $u \vdash v$ és $u + v \vdash u - v$, vagyis (u, v) és $(u + v, u - v)$ kijelölt vektorpárok, akkor a páratlan, „merőlegesen” additív függvények éppen a feltétel nélkül additívak, míg a páros g megoldások a kvadratikus $b = g_u : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ függvénnyel

$$g(x) = g(\xi_1 u + \xi_2 v) = b(\xi_1) + b(\xi_2), \qquad x = \xi_1 u + \xi_2 v \in E, \tag{8}$$

alakba írhatók. Ha a $(\lambda u, \mu v)$ és $(\lambda[u+v], \mu[u-v])$ jelentik az összes kijelölt „merőleges” vektorpárt $(\lambda, \mu \in \mathbf{R})$, akkor könnyen ellenőrizhető, hogy a (9) alakú függvények mindegyike páros és „merőlegesen” additív, vagyis az adja az általános páros megoldást.

Amennyiben elkezdjük bővíteni a „merőleges” vektorpárok körét a homogén tulajdonság megőrzésével, akkor a páros megoldások halmaza szűkül, hiszen egyre több feltételt kell teljesítenie minden megoldásnak. Minden esetre a

$$g(x) = g(\xi_1 u + \xi_2 v) = \xi_1^2 + \xi_2^2, \qquad x = \xi_1 u + \xi_2 v \in E,$$

függvény valódi páros megoldás marad mindaddig, amíg csakis a

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 = 0$$

feltételt teljesítő $(x, y) = (\xi_1 u + \xi_2 v, \eta_1 u + \eta_2 v)$ vektorpárokat vesszük be a „merőlegesek” közé.

Mihelyt azonban ezektől eltérő vektorpárt is kijelölünk „merőlegesnek”, máris eltűnik minden páros, a $[0, u]$ szakaszon korlátos, „merőlegesen” additív függvény.

Irodalom

[1] Gudder, S. — Strawther, D., *A converse of Pythagoras' Theorem*, Amer. Math. Monthly **84** (1977), 551–553.

[2] Rátz, J. — Szabó, Gy., *On orthogonally additive mappings, IV*, Aequationes Mathematicae **38** (1989), 73–85.

Szabó György

Debrecen, Kossuth Lajos Tudományegyetem