Ismert feladat a következő[1]:

*Jelöljük a $p(x)$ polinom abszolút értékének maximumát a [-1;+1] zárt intervallumon $M_p$-vel. Melyik $p(x) = x^2+ax+b$ alakú másodfokú polinomra lesz $M_p$ minimális?*

Sokféleképpen el lehet indulni a megoldással. Szemléletesen arról van szó, hogy az $x \mapsto p(x)$ függvény grafikonja felfelé álló parabola, amelynek pl. $a > 0$ esetén a negatív félegyenesen van a csúcsa, s így a [0; 1] intervallumon biztosan monoton nő. Növekedése $p(1)-p(0) = 1+a$ nagyobb 1-nél, s ez csak úgy lehet, ha vagy $p(1)$, vagy $p(0)$ abszolút értéke nagyobb $1/2$-nél. Az $a < 0$ eset teljesen szimmetrikus: az y-tengelyre kell tükrözni. Ha végül $a = 0$, akkor $p(x) = x^2+b$ alakú, az ilyen egyenletű parabola a [-1; 0] intervallumban csökken, a [0; 1] intervallumban nő, tehát $M_p$ a $|p(-1)|$, $|p(0)|$ és $|p(1)|$ értékek közül a legnagyobb. $b = -1/2$ esetén mindhárom abszolút érték $1/2$, tehát $M_p = 1/2$. A $b$ bármely más értéke mellett a három abszolút érték közül legalább egy nagyobb $1/2$-nél, tehát $M_p > 1/2$. A következő állítást kaptuk:

**1.** *Bármely $p(x) = x^2 + ax + b$ alakú másodfokú polinomra $M_p \geq \frac{1}{2}$. Egyenlőség csak a $p(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ polinomra van.*

Az $a > 0$ és $a < 0$ eset szétválasztását megtakaríthattuk volna a következő — inkább algebrai — ötlettel:

**2.** *Ha $p(x)$ 1 főegyütthatójú[2], és fokszáma páros, akkor a*

$$q(x) = \frac{p(x)+p(-x)}{2} \tag{1}$$

*polinom foka azonos $p$ fokával, főegyütthatója 1, és $q$-ban csak páros tagok szerepelnek nullától különböző együtthatóval. Ha $p$ fokszáma páratlan, akkor az*

$$r(x) = \frac{p(x)-p(-x)}{2} \tag{2}$$

*polinom fokszáma azonos $p$ fokával, főegyütthatója 1, $r$-ben csak páratlan fokú tagok szerepelnek nullától különböző együtthatóval. Fennáll továbbá az $M_p \geq M_q$ és az $M_p \geq M_r$ egyenlőtlenség.*

Az együtthatókra vonatozó állítások nyilvánvalóak. AZ egyenlőtlenségek pedig az összeg és különbség abszolút értékére vonatkozó egyenlőtlenségekből következnek:

$$|p(x) \pm p(-x)| \leq |p(x)| + |p(-x)| \leq 2M_p.$$

Ha $p(x) = x^2 + ax + b$, akkor $q(x) = x^2 + b$, így a most bizonyítottak szerint elég $p(x) = x^2 + b$ alakú plinomok között keresni $M_p$ minimumát. Ha $p(x)$ ilyen alakú, akkor minimuma $p(0) = b$, maximuma a [-1; 1] intervallumban $p(1) = p(-1) = 1+b$, így $M_p \geq |b|$ és $M_p \geq |1+b|$. Ha $b \neq -1/2$, akkor $|b|$ és $|1+b|$ közül legalább az egyik nagyobb $1/2$-nél, tehát $M_p$ is, $b = 1/2$ esetén $M_p = 1/2$. Ezzel újabb, de ez alkalommal csak *majdnem* teljes bizonyítást adtunk az **1.** állításra. (Érdemes meggondolni, hol hiányos ez a bizonyítás, és hogyan lehet a hiányt pótolni. A kérdésre később még visszatérünk.)

Az első bizonyításban szükségünk volt polinomok abszolút értékeinek maximumára más intervallumokban is, s erre a továbbiakban is szükségünk lesz. Ezért bevezetjük a következő jelölést: $M_p[a,b]$ jelöli a $p$ polinom abszolút értékének az $[a,b]$ intervallumon felvett maximumát. (Mivel a polinomfüggvények az egész számegyenesen folytonosak, ez a maximum létezik.) $M_p[-1;1]$ nyilván $M_p$-vel egyenlő.

Az eredeti feladat általánosan is megfogalmazható:

*Az 1 főegyütthatójú $n$-edfokú $p(x)$ polinomok közül melyikre minimális $M_p[a,b]$?*

Vagyis: melyik $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinomnak legkisebb a legnagyobb eltérése az azonosan 0 függvénytől az $[a,b]$ intervallumban, tehát melyik fér bele a legkisebb, az $x$-tengelyre szimmetrikus sávba?

A kérdés önmagában is érdekes, és fontos szerepe van a matematika több ágában is. A következőkben erre fogunk választ adni. Mindenekelőtt négy megjegyzést fűzünk hozzá:

1) Korántsem magától értetődő, hogy *van* olyan $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinom, amelyre $M_p[a,b]$ *minimális.* Eleve csak azt tudjuk biztosan, hogy $M_p[a,b]$-nek van alsó korlátja, hiszen minden $p$-re $M_p[a,b] \geq 0$. Van tehát olyan legnagyobb alsó korlát is — jelöljük a továbbiakban $m_n[a,b]$-vel —, amelyre igaz, hogy ha $p$ 1 főegyütthatójú $n$-edfokú polinom, akkor $M_p[a,b] \geq m_n[a,b]$. Egyáltalán nem biztos azonban, hogy van olyan polinom is, amelyre $M_p[a,b] = m_n[a,b]$, vagyis nem biztos, hogy ezt a legnagyobb alsó korlátot $M_p[a,b]$ el is éri. $n = 2$-re mindkét bizonyításból kiderült, hogy — legalábbis a [-1; 1] intervallum esetében — $m_2[-1,1] = \frac{1}{2}$, és van ilyen polinom: az $x^2 - \frac{1}{2}$ polinom. (Az első bizonyítás következménye az is, hogy több ilyen polinom nincs. A második bizonyításból csak annyi látható, hogy a kapott $x^2 - \frac{1}{2}$ polinom egy, a minimális $m_n = \frac{1}{2}$ értéket szolgáltató polinom, de nem bizonyítottuk,

[1] A hetvenes években a KöMaL-ban is szerepelt, mint olimpiai előkészítő feladat

[2] Egy polinom főegyütthatójának a legmagasabb fokú tag együtthetóját nevezzük.

hogy több ilyen nincs.) Itt jegyezzük meg azt is, hogy $n = 1$-re is van ilyen polinom: könnyen ellenőrizhető, hogy $m_1 = 1$, és az $x$ polinom az egyetlen minimális polinom. Itt és a továbbikaban $m_n[-1;1]$ helyett röviden $m_n$-et írunk.

2) Megmutatjuk, hogy az általános $[a, b]$ intervallum esete visszavezethető a [-1,1] intervallumra. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a $p(x)$ polinom értékkészlete az $[a, b]$ intervallumon megegyezik a $t(x) = p(cx + d)$ polinom értékkészletével a [-1,1] intervallumon, ha $c = \dfrac{b-a}{2}$, $d = \dfrac{b+a}{2}$; $c$ és $d$ értékét így választva tehát $M_p[a, b] = M_t$. Ha $p(x)$ $n$-edfokú és főegyütthatója 1, akkor a $t(x)$ polinom is $n$-edfokú és főegyütthatója $c^n$, az $s(x) = \dfrac{t(x)}{c^n}$ polinom tehát 1 főegyütthatójú $n$-edfokú polinom, s abszolút értékének maximuma a [-1,1] intervallumon $\dfrac{M_t}{c^n} = \dfrac{M_p[a,b]}{c^n}$. Minden $[a, b]$-n értelmezett 1 főegyütthatójú $n$-edfokú polinomhoz hozzárendeltünk tehát egy [-1,1]-en értelmezett 1 főegyütthatójú $n$-edfokú $s$ polinomot, amelyre $M_s = \dfrac{M_p[a,b]}{c^n}$. Ez a hozzárendelés nyilván kölcsönösen egyértelmű (az $s$ polinomból is egyérletműen vissza tudunk következtetni a $p$ polinomra), ezért azt kaptuk, hogy $m_n = \dfrac{m_n[a,b]}{c^n}$. Ide $c$ értékét beírva a következőt kapjuk:

**3.** $m_n = 2^n \dfrac{m_n[a,b]}{(b-a)^n}$.

3) A főegyütthatóra tett kikötésre szükség van, ha nem teszünk ilyen kikötést, akkor — minden együtthatót megfelelően kis pozitív számnak választva — az abszolút érték maximuma egy adott intervallumban tetszőlegesen kicsi lehet. Nyilvánvaló, hogy ha pl. kikötjük, hogy a főegyüttható legyen nagyobb vagy egyenlő, mint $a$, $(a > 0)$, akkor elég azokat a polinomokat vizsgálni, ahol a főegyüttható pontosan $a$. Az ebben az esetben kapott abszolútérték-maximum pedig pontosan $1/a$-szorosa annak, amit arra az esetre kapunk, amikor a főegyüttható pontosan 1.

4) Előrebocsátunk még egy általános megjegyzést. Szemléletesen is nyilvánvaló, hogy egy magasabb fokú polinom „jobban oda tud simulni" az $x$-tengelyhez, mint egy alacsonyabb fokú. Vagyis:

**4.** $m_n \geq m_{n+1}$, *tehát az* $m_1$, $m_2$, $\ldots m_n$, $\ldots$ *sorozat monoton csökken.*

Ez az állítás következik abból, hogy ha $p$ $n$-edfokú 1 főegyütthetőjú polinom, akkor $s(x) = xp(x)$ olyan $(n + 1)$-edfokú 1 főegyütthatójú polinom, amelyre $M_p \geq M_s$. Ez utóbbi egyenlőtlenség pedig következik abból, hogy $|x| \leq 1$ és $|p(x)| \leq M_p$, így $|xp(x)| \leq M_p$.

Mielőtt rátérnénk $m_n$ értékének és (egy) minimális polinomnak a megkeresésére az általános esetben, még megvizsgáljuk az $n = 3$ esetet.

Legyen $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alakú. Olyan $p$ polinomot keresünk tehát az ilyen alakúak közül, amelyre $M_p$ minimális. Ha $p(x)$ minimális, akkor a (2)-ben definiált $r(x)$ polinom is az, hiszen $M_r \leq M_p$ a **2.** állítás szerint, s itt $p$ minimalitása miatt csak egyenlőségjel állhat. Ezért elég olyan polinomokat vizsgálnunk, amlyek $p(x) = x^3 + bx$ alakúak. Az ilyen polinomokra $p(x) = -p(-x)$ (vagyis *páratlan* függvények), tehát abszolút értékük maximumát a [-1,1] intervallum helyett elég az $I = [0, 1]$ intervallmon vizsgálni. Ezen az intervallumon az $x \mapsto p(x) = x^3 + bx$ függvény konvex[3], tehát maximumát az intervallum valamelyik végpontjában veszi fel. $p(1) = 1 + b$, $p(0) = 0$. Kézenfekvő az intervallum „közepén" is megvizsgálni a függvényt, mert „valahol ott" lesz a minimuma.

Tekintsük tehát a $p\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{b}{2}$ értéket. Ez az érték $b < -\dfrac{3}{4}$ esetén kisebb, mint $-\dfrac{1}{4}$, tehát ez esetben $M_p > \dfrac{1}{4}$. Ha viszont $b > -\dfrac{3}{4}$, akkor $p(1) = 1 + b > \dfrac{1}{4}$, tehát ez esetben is $M_p > \dfrac{1}{4}$ adódik. Azt kaptuk, hogy a $b = -\dfrac{3}{4}$ eset kivételével $M_p > \dfrac{1}{4}$. Marad a $b = -\dfrac{3}{4}$ eset. Ekkor $p(x) = x^3 - \dfrac{3x}{4}$ maximuma $p(1) = \dfrac{1}{4}$, minimuma — mint az pl. deriválással könnyen látható — éppen az $x = \dfrac{1}{2}$ helyen van, $-\dfrac{1}{4}$. Ezzel majdnem teljesen — beláttuk a következő állítást:

**5.** $m_3 = \dfrac{1}{4}$, *és egyenlőség csak a* $p(x) = x^3 - \dfrac{3x}{4}$ *polinomra van.*

Valójában azt még nem láttuk be, hogy csak a $p(x) = x^3 - \dfrac{3x}{4}$ polinomra állhat egyenlőség, mindössze azt láttuk be, hogy az $x^3 + bx$ alakú polinomok között nincs más, amelyre egyenlőség áll. A fenti bizonyításban kiderült, hogy érdemes a harmadfokú polinomokat az $x = -1$, $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, 1 helyen vizsgálni. Ennek alapján egy rövidebb — és immár teljes — bizonyítást adhatunk az **5.** állításra:

Legyen $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tetszőleges 1 főegyütthatójú harmadfokú polinom, és tegyük fel, hogy $M_p \leq \dfrac{1}{4}$. Ekkor

$$|2 + 2b| = | - p(-1) + p(1)| \leq |p(-1) + p(1)| \leq \frac{1}{2},$$

és

[3] Mert $x \geq 0$-ra az $x \mapsto x^3$ függvény konvex, és egy lineáris — tehát konvex — függvényt adunk hozzá.

$$\left|\frac{1}{4}+b\right| = \left|-p\left(-\frac{1}{2}\right)+p\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \left|p\left(-\frac{1}{2}\right)\right| + \left|p\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}$$

tehát

$$|1+b| \le \frac{1}{4} \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{1}{8}+\frac{b}{2}\right| \le \frac{1}{4}.$$

Mint az első bizonyításban már láttuk, ez csak $b=-\frac{3}{4}$ esetén teljesül.

Írjuk be a kapott $b$ értéket a polinomba. Ekkor $p(1)=\frac{1}{4}+a+c$, s ennek abszolút értéke csak akkor nem nagyobb $\frac{1}{4}$-nél, ha $a+c\ge 0$. Azt kapjuk, hogy $a+c=0$, $a=-c$. Most ugyanezt végigcsinálva, $p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{a}{4}+c$ és $p\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{a}{4}+c$, mindkettő abszolút értéke csak akkor nem lesz nagyobb $\frac{1}{4}$-nél, ha $\frac{a}{4}=-c$. Mindkét feltétel $a$-ra és $c$-re pedig csak úgy teljesülhet, ha $a=c=0$. Ezzel az **5.** állítást teljesen beláttuk.

Most megmutatjuk, hogy az $n=2$ esetből hogyan következik az $n=4$ eset. A bizonyítás eleje hasonló az $n=3$ esetéhez. Legyen $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$. Azt a $p$ polinomot keressük az ilyen alakúak között, amely abszolút értékének maximuma a legkisebb. Ha $p$ ilyen minimális polinom, akkor a **2.** állítás szerint az (1)-ben definiált $q(x)=x^4+bx^2+d$ polinom is az. Erre a polinomra viszont igaz, hogy $q(x)=q(-x)$ (a függvény *páros*), tehát az abszolút érték maximumát a [-1,1] intervallum helyett most is elég az $I=[0,1]$ intervallumon vizsgálni. Helyettesítsünk most $x$ helyébe $x=\sqrt{\frac{z+1}{2}}$-t. Így a $P(z)=\frac{(z+1)^2}{4}+b\frac{z+1}{2}+d=\frac{1}{4}(z^2+2(1+b)z+1+2b++4d)$ másodfokú polinomot kapjuk. Ha $z$ a [-1,1] intervallumon fut végig. akkor $x$ éppen az $I$ intervallumon fut végig. Másrészt a $4P(z)$ polinom 1 főegyütthatójú másodfokú polinom, tehát ha $z$ a [-1,1] intervallumon változik, akkor abszolút értékének maximuma az **1.** állítás szerint legalább 1/2. Azt kapjuk tehát, hogy van olyan $x$ $I$-ben, tehát olyan $z$ [-1,1]-ben, amelyre $p(x)=P(z)\ge\frac{1}{8}$. Ebből következik, hogy $M_p\ge\frac{1}{8}$.

Gondolatmenetünket visszafele követve könnyen konstruálhatunk olyan 1 főegyütthatójú negyedfokú $p$ polinomot, amelyre $M_p=\frac{1}{8}$. Ehhez mindössze annyi kell, hogy $4P(z)$ abszolút értékének a maximuma pontosan $1/2$ legyen, hiszen ekkor $P(z)$, s így $p(x)$ abszolút értékének maximuma is pontosan $\frac{1}{8}$ lesz. Vagyis — az **1.** állítást felhasználva — az kell, hogy $4P(z)=z-\frac{1}{2}$ alakú legyen, vagyis $b=-1$ és $d=\frac{1}{8}$ legyen. A következő állításhoz jutottunk:

**6.** $m_4=\frac{1}{8}$, *és egyenlőség csak a* $p(x)=x^4-x^2+\frac{1}{8}$ *polinomra van.*

Ismét nem bizonyítottuk, hogy más $p$ polinomra nincs egyenlőség, de ennek a bizonyítása megint ugyanúgy megy, mint az $n=3$ esetben, ezért az olvasóra bízzuk.

Nézzük végig, hogy mit ad a fenti okoskodás az általános esetben. Legyen

$$p(x)=x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+a_kx^k+\cdots+a_0.$$

Ekkor

$$q(x)=x^{2n}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+a_{2k}x^{2k}+\cdots+a_2x^2+a_0,$$

és $M_q\le M_p$ a **2.** állítás szerint. Másrészt $q$ páros függvény, tehát $M_q=M_q[0,1]$. Végül azt is tudjuk, hogy ha $x^2$ helyébe $\frac{z+1}{2}$-t írunk, akkor a kapott

$$t(z)=q\left(\sqrt{\frac{z+1}{2}}\right)=\frac{(z+1)^n}{2^n}+a_{2n-2}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots+a_2\frac{z+1}{2}+a_0$$

$n$-edfokú $\frac{1}{2^n}$ főegyütthatójú polinom, és ha $z$ végigfutja a[-1,1] intervallumot, vagyis $t$ értékkészlete a [-1,1] intervallumon azonos az eredeti $q$ polinom értékkészletével az $I$ intervellumon. Ebből következik, hogy $M_t=M_q[0,1]=M_q$. Az 1 főegyütthatójú $n$-edfokú $2^nt(z)$ polinom abszolút értékének a maximuma a [-1,1] intervallumon tehát $2^nM_t=2^nM_q$.

Tekintsük most a $q(x)\leftrightarrow 2^nt(z)$ hozzárendelést. Ez minden $2n$-edfokú 1 főegyütthatójú $q$ polinomhoz egyértelműen hozzárendel egy $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinomot, amely abszolút értékének maximuma a [-1,1] intervallumon $2^nM_q$. A hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, hiszen a $2^nt(z)$ polinomból a $z=2x^2-1$ helyettesítéssel majd $2^n$-nel osztva visszakapjuk az eredeti $q(x)$ polinomot. Ha tehát vesszük az összes $2n$-edfokú 1 főegyütthatójú $q(x)$ alakú (páros) polinomot, ls tekintjük mindegyikre az $M_q$ értékét, akkor ezek legnagyobb alsó korlátja éppen $m_{2n}$. Másrészt a hozzárendelt $2^nt$ polinomok halmaza éppen az összes $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinomok halmaza lesz, s ezeknél az abszolút érték maximumának legnagyobb alsó korlátja éppen $m_n$. De ezek az abszolút érték maximumok megegyeznek a $q$-khoz tartozó abszolút érték maximumok $2^n$-szeresével, tehát legnagyobb alsó korlátjuk is megegyezik azok alsó korlátjának, azaz $m_{2n}$-nek a $2^n$-szeresével. Ebből következik, az alábbi állítás:

**7.** $m_{2n} = \frac{m_n}{2^n}$. *Ha van olyan $p(x)$ 1 főegyütthatójú $n$-edfokú polinom, amelyre $M_p = m_n$, akkor az $s(x) = \frac{p(2x^2-1)}{2^n}$ olyan 1 főegyütthatójú $2n$-edfokú polinom, amelyre $M_s = m_{2n}$.*

Megjegyezzük, hogy az általános esetben is bizonyítható, hogy az így kapott $s(x)$ polinom az egyetlen minimális polinom, de bizonyítása technikai jellegű, ezért itt lemondunk róla. A **7.** állításból már minden kettőhatványra (és a kettőhatványok háromszorosára) meg tudjuk mondani $m_n$ pontos értékét:

**8.** $m_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, *ha $n$ kettőhatvány, vagy annak háromszorosa.*

Ha $n = 2, 3$, akkor ezt az állítást már igazoltuk. Ha $n = 2^k$, ill. $n = 3 \cdot 2^k$-ra már beláttuk az állítást, akkor $n = 2^{k+1}$, ill. $n = 3 \cdot 2^{k+1}$-re a **7.** állításból már következik. Legyen pl. $n = 2^{k+1}$. Ekkor $m_n = \frac{m_{n/2}}{2^{n/2}}$, s itt az indukciós feltevés szerint $m_{n/2} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}$. Ezt az $m_n$-re kapott képletbe beírva azt kapjuk, hogy $m_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Most rátérünk a főtételünk bizonyítására:

**9.** *Minden $n$ egészre $m_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Vagyis: bármely $n$-edfokú 1 főegyütthatójú $p$ polinomhoz van olyan $x$ a [-1,1] intervalumban, amelyre $|p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. Van olyan polinom, amelyre ez a becslés nem javítható, amelynek tehát minden 1-nél nem nagyobb abszolút értékű $x$ helyen vett $p(x)$ helyettesítési értéke kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{2^{n-1}}$.*

Az általános tétel bizonyítása egy meglepő ötleten múlik. Tekintsünk egy tetszőleges $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinomot. Láttuk, hogy az $n$-edfokú és a $2n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinomok között szoros összefüggés van, vizsgáljuk meg tehát az $s^2(x)$ polinomot. Ennek a polinomnak az értékkészlete a [-1,1] intervallumon nyilván 0 és $M_s^2$ között változik. Célszerű tehát a $p(x) = s^2(x) - \frac{M_p^2}{2}$ polinomra áttérni, hiszen ennek értéke már $\frac{-M_s^2}{2}$ és $\frac{M_s^2}{2}$ között változik, tehát

$$M_p = \frac{M_s^2}{2}.$$

Most készítsük el az (1) képlet alapján $p$-hez a megfelelő, csak páros kitevőjű tagokat használó $q$ polinomot. Ekkor $M_q \leq M_p$, és mivel $q$ páros függvény, azért a [0,1] intervallumon és a [-1,1] intervallumon azonos az értékkészlete. Tehát

$$M_q[0,1] = M_q \leq M_p = \frac{M_s^2}{2}. \tag{3}$$

A $q$ polinomban írjunk $x^2$ helyett mindenütt $\frac{z+1}{2}$-t, így egy $n$-edfokú $t(z)$ polinomot kapunk, amelynek főegyütthatója $\frac{1}{2^n}$. Ha $x$ végigfut a [0,1] intervallumon, akkor $x^2$ is, és ($x \geq 0$-ra) viszont. Másrészt ha $z$ végigfut a [-1,1] intervallumon, akkor $x^2$ a [0,1] intervallumon fut végig, és viszont. Ezért $M_t = M_q[0,1]$. Szorozzuk meg a $t$ polinomot $2^n$-nel, ekkor főegyütthatója 1 lesz, abszolút érték maximuma pedig $2^n$-szeresére nő. A kapott $u(z)$ polinom tehát $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinom, és igaz rá, hogy $M_u = 2^n M_t$. Összegezve:

$$M_u = 2^n M_q[0,1] \leq 2^n \frac{M_s^2}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad M_u \leq 2^{n-1} M_s^2.$$

Tegyük fel először, hogy van minimális $n$-edfokú 1 főegyütthetójú $s$ polinom, vagyis $M_s = m_n$. Ekkor a kapott egyenlőtlenség jobb oldala $2^{n-1}m_n^2$. Másrészt $u$ is $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinom, így $m_n \leq M_u$. A kapott egyenlőtlenség bal oldalát tehát csökkentjük, ha $m_n$-et írunk. Ezzel a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$m_n \leq 2^{n-1} m_n^2.$$

Ha most tudnánk, hogy $m_n$ nem nulla, akkor oszthatnánk vele, s éppen a kívánt egyenlőtlenséghez jutnánk. De a **4.** állítás szerint az $m_n$-ek sorozata monoton csökken, és a **7.** állítás szerint van egy pozitív tagú részsorozata, így minden $m_n$ pozitív, tehát oszthatunk vele.

Ezzel befejeztük a bizonyítást abban az esetben, ha *van* minimális polinom. De ezt még nem tudjuk.

Nézzük tehát azt az esetet, ha $m_n$-ről csak azt tudjuk, hogy legnagyobb alsó korlátja az $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinomok abszolút értékei maximumának. Minden pozitív $a$ számhoz van tehát olyan $s$ polinom, amelyre $M_s \leq (1+a)m_n$. (Itt ismét használjuk, hogy $m_n$ pozitív,) A fenti $M_u \leq 2^{n-1}M_s^2$ egyenlőtlenséget most is megkaphatjuk, s $M_u$ most is nagyobb vagy egyenlő $m_n$-nél, de most a jobb oldalról csak annyit tudunk, hogy $\frac{m_n}{2^{n-1}}$-nel osztva (mert nem nulla) a kívántnál kicsit gyengébb

$$\frac{1}{2^{n-1}} \le (1+a)^2 m_n$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt az egyenlőtlenséget azonban *minden* pozitív $a$-ra megkaptuk. Márpedig ha $a$ tart nullához, akkor a bal oldal nem változik, a jobb oldal $m_n$-hoz tart. Tehát a bal oldal nem nagyobb a jobb határértékénél sem, s így most is megkapjuk a kívánt

$$\frac{1}{2^{n-1}} \le m_n$$

egyenlőtlenséget.

Hátra van még annak megmutatása, hogy van olyan $n$-edfokú 1 főegyütthatójú $p$ polinom, amelyre $M_p = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Hogy melyik ez a $p$ polinom, az végső soron a bizonyításból is kikövetkeztethető lenne (fel lehetne rá írni egy függvényegyenletet), de ez meglehetősen bonyolult és kevéssé szemléletes volna. Ehelyett nézzük meg, milyennek is kell lennie a keresett polinomnak. Kicsit átfogalmazva: olyan polinomot keresünk, amelynek főegyütthatója $2^{n-1}$, és a [-1,1] intervallumon az értéke -1 és 1 között változik. Mármost ismeretes a következő tétel:

**10.** $\cos n\alpha$ *kifejezhető* $\cos\alpha$ $n$*-edfokú, egész együtthatós polinomjaként. Ebben a polinomban a főegyüttható* $2^{n-1}$*.*

Így például $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$. A tétel könnyen igazolható teljes indukcióval. A kezdő lépést $n=(1)$, 2, 3, 4-re az imént láttuk. Most feltesszük, hogy $n=k-1$-re és $n=k$-ra igaz az állítás, és bebizonyítható $N=(k+1)$-re. Elég annyit meggondolnunk, hogy $\cos(k+1)\alpha$ felírható $\cos k\alpha$, $\cos(k-1)\alpha$, és $\cos\alpha$ segítségével:

$$\cos(k+1)\alpha = 2\cos k\alpha\cos\alpha - \cos(k-1)\alpha.$$

A jobb oldalon $\cos k\alpha$ felírható $\cos\alpha$ $k$-adfokú egész együtthatós polinomjaként, így $2\cos k\alpha\cos\alpha$ felírható $\cos\alpha$ $(k+1)$-edfokú egész együtthatós polinomjaként. A kivonandó viszont felírható $\cos\alpha$ $(k-1)$-edfokú egész együtthatós polinomjaként. A jobb oldal tehát $\cos\alpha$ $(k+1)$-edfokú egész együtthatós polinomja, $(k+1)$-edfokú tagot csak az első tagból kapunk, így a főegyüttható kétszerese lesz a $\cos k\alpha$-hoz tartozó polinom főegyütthatójának, tehát $2\cdot 2^{k-1} = 2^k$. Ezzel állításunkat beláttuk.

E tétel szerint van egy olyan

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

egész együtthatós polinom, amely $x=\cos\alpha$ helyettesítéssel éppen $\cos n\alpha$-t adja. $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$. Ezt a $T_n$ polinomot az *$n$-edrendű Csebisev-polinomnak* nevezzük.

Ha most $x$ a [-1,1] intervallum egy pontja, akkor van olyan $\alpha$, amelyre $x=\cos\alpha$, s erre az $\alpha$-ra $T_n(x) = \cos n\alpha$. De ekkor $|T_n(x)| \le 1$. $T_n(x)$ tehát megfelel a kívánalmainknak: főegyütthatója $2^{n-1}$, és abszolút értékeinek maximuma 1. (Azt már láttuk, hogy kisebb vagy egyenlő mint 1, másrészt $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos n0 = \cos 0 = 1$.)

Azt kaptuk tehát, hogy ha $p(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$, akkor $M_p = m_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Vagyis *az $n$-edrendű Csebisev-polinom $2^{n-1}$-edrésze egy olyan polinom, amelynek a $[-1,1]$ intervallumon felvett abszolút értékeinek maximuma a legkisebb az $n$-edfokú 1 főegyütthatójú polinomok között.* (Belátható, hogy ez az egyetlen.) Ezzel a **9.** állítás bizonyítását befejeztük.

**Surányi László**