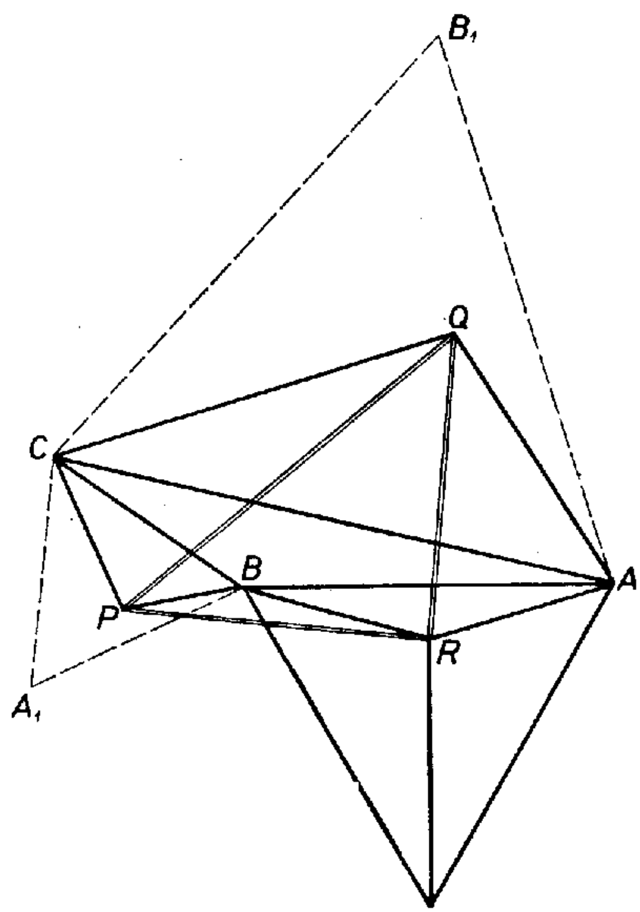
Rajzoljunk az ABC háromszög AB oldalára kifelé szabályos háromszöget, ennek a harmadik csúcsát jelöljük C_1-gyel. Mivel az ABR háromszög egyenlő szárú, R is, C_1 is az AB szakasz felező merőlegesén van, és a BC_1R, AC_1R háromszögek e felezőmerőlegesre szimmetrikusan helyezkednek el. Mivel e háromszögekben

$$RBC_1\sphericalangle = RAC_1\sphericalangle = 45°, \qquad RC_1B\sphericalangle = RC_1A\sphericalangle = 30°,$$

ezek a háromszögek hasonlóak a BCP, ACQ háromszögekhez, és az egyes háromszögek csúcsait úgy soroltuk fel, hogy e felsorolás szerint azonos helyzetűek feleljenek meg a valóságban egymásnak. A BC_1R, BAR, BAC, BPC háromszögek egy–egy oldalukkal csatlakoznak egymáshoz, és ez az oldaluk rendre elválasztja őket. Emiatt e háromszögek körüljárása rendre ellentétes, így a BC_1R, BCP háromszögek körüljárása megegyezik. Hasonlóan látható be, hogy azAC_1R, ACQ háromszögek körüljárása is egyező.

Forgassuk el a C_1 pontot B körül addig, amíg a BR félegyenesre nem kerül, majd alkalmazzunk $BC_1 : BR$ arányú kicsinyítést. Mivel a BC_1R, BCP háromszögek hasonlóak, és hasonló helyzetűek, ugyanez a transzformáció C-t P-be viszi, tehát a transzformáció a CC_1 szakaszhoz a PR szakaszt rendeli. Összefoglalva forgatva nyújtásnak nevezzük azt a transzformációt, mely egy forgatás, majd egy, a forgatással azonos centrumú nyújtás (vagy mint esetünkben, kicsinyítés) egymás utáni végrehajtásából áll. Mivel az AC_1R, ACQ háromszögek is hasonlóak és hasonló helyzetűek, az az A centrumú forgatva nyújtás, amely C_1-t R-be viszi, C-hez Q-t rendeli; és a CC_1 szakaszhoz az RA szakaszt rendeli. E két forgatva nyújtás aránya megegyezik, mert a BC_1R, AC_1R háromszögek egybevágóak. Mindkettőben a forgatás 45°-os, hiszen ekkorák a C_1BR, C_1AR szögek. Emiatt a CC_1 szakasznak a két transzformációból származó RP, RQ képei egyenlő hosszúak, és a CC_1 egyenessel 45°-os szöget zárnak be. Mivel a C_1BR, C_1AR szögek szimmetrikusak a C_1R egyenesre, az irányításuk ellentétes, és így az RP, RQ szakaszok közti szög 90°-os. A bizonyítást ezzel befejeztük.



Megjegyzések. 1. Legyen A-nak a CQ egyenesre, illetve B-nek CP-re vonatkozó tükörképe B_1, illetve A_1. Az AB_1C, A_1BC háromszögek is szabályosak, és bennük a Q, P pontok hasonló helyzetűek. Hasonló hozzájuk R-nek is a helyzete az ABC_1 háromszögben, csak az ABC_1R alakzatnak az ABC háromszöghöz viszonyított helyzete különbözik az AB_1CQ, A_1BCP alakzatokétól. Érdemes megvizsgálni, hogy módosul az állítás, ha a P, Q, R pontokat a PC, QC, RC_1 egyenes más, alkalmasan választott pontjaival (például a PC, QC, RC_1 szakaszok felezőpontjaival) helyettesítjük.

2. Beláthatjuk állításunk helyességét annak alapján is, hogy ha egymás után alkalmazzuk azt a P, Q, R körüli forgatva nyújtást, melyek közül az első B-t C-be, a második C-t A-ba, a harmadik A-t B-be viszi, eredőül azt a transzformációt kapjuk, mely minden ponthoz önmagát rendeli.