1. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján:

$$r_1 + r_2 = 2$$
$$r_1 r_2 = 0,5.$$

A kerületek összege: $k_1 + k_2 = 2(r_1 + r_2)\pi = 4\pi$. A területek összege: $t_1 + t_2 = (r_1^2 + r_2^2)\pi = \left((r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2\right)\pi = 3\pi$.

2. A keresett egyenes átmegy a $KLMN$ téglalap O középpontján. Ez az egyenes a KL, MN oldalakat, valamint az NK oldalegyenest rendre az A, B, C pontokban metszi. Belátható, hogy KLF, CKA, CNB derékszögű háromszögek hasonlóak. Mivel $3 \cdot FL = KL$, azért ha $KA = x$, akkor $KC = 3x$. A téglalap középpontos hasonlósága miatt $AL = BN = 3 - x$. Tudjuk továbbá, hogy $NC = KC - KN = 3x - 2$. De $3 \cdot NB = NC$, ezért $3(3 - x) = 3x - 2$, így $x = 11/6$, $AL = 7/6$, (ha $KL = 3$ egység).

A keresett arány: $KA : AL = MB : BN = 11 : 7$.

3. A kifejezés értelmezési tartománya: $x \geq -2$, de $x \neq 1, x \neq 3, x \neq 5$. Szorozzuk meg mind a két oldalt a biztosan pozitív

$$\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+3}+2} : \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+13}+4}$$

kifejezéssel, és alkalmazzuk az $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ azonosságot:

$$\frac{x+2-1}{x+3-4} : \frac{x+4-9}{x+13-16} \geq 0,$$

összevonás és rendezés után:

$$\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x-5)} \geq 0.$$

A négy elsőfokú tényező előjelének változásait és az értelmezési tartományt figyelembe véve a megoldás:

$$-2 \leq x \leq -1; \qquad 1 < x < 3; \qquad 5 < x.$$

4. Tekintsük azt a három kúpot, amelyeknek a csúcsa megegyezik az eredeti kúp csúcsaival, alaplapja a két vágásfelületen, valamit az eredeti alaplapon van. Ezek térfogatainak aránya: $V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 3 : 6$. Mivel ezek a kúpok hasonlóak, és tudjuk, hogy a térfogatok a hasonlóság arányának köbével arányosak, azért a kúpok magasságaink aránya: $m_1 : m_2 : m_3 = \sqrt[3]{1/6} : \sqrt[3]{1/2} : 1$.

A feladatban keresett arány:

$$m_1 : (m_2 - m_1) : (m_3 - m_2) = \sqrt[3]{1/6} : \left(\sqrt[3]{1/2} - \sqrt[3]{1/6}\right) : \left(1 - \sqrt[3]{1/2}\right) = 0,55 : 0,243 : 0,206.$$

5. Könnyen számolható, hogy P pontja az e szimmetriatengelynek. Írjuk fel a QP Thálesz-körének, K-nak az egyenletét.

$$x^2 + (y - 1,5)^2 = 10,25.$$

Kiszámítjuk K és e közös pontjainak koordinátáit. Az e egyenletéből $x = 2y - 6$, ezt beírjuk K-ba, másodfokú egyenlethez jutunk, amiből $y_1 = 4, y_2 = 1,4$. A két közös pont $P(2;4); T(-3,2;1,4)$, ahol T a QR alap felezője. A PQT derékszögű háromszög befogóinak hossza: $TQ = \sqrt{7,2}$, $TP = \sqrt{33,8}$. Így a PQR háromszög területe $TQ \cdot TP = 15,6$. De $QP = \sqrt{41}$, a keresett magasság legyen m, ekkor a terület: $QP \cdot m/2$. A területre kapott eredmény összevetéséből $m = 31,2/\sqrt{41} \approx 4,87$.

6. A rövidebb alap és a két szár legyen b, a magasság m, a hosszabb alap pedig $a = b + 2x$. Felírjuk a terület négyzetét: $t^2 = m^2(b + x)^2$, de a Pitagorasz-tétel alapján $m^2 = b^2 - x^2$. Ezek alapján $3 \cdot t^2 = (3b - 3x)(b + x)^3$. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést:

$$(3b - 3x)(b + x)^3 \leq \left[\frac{(3b - 3x) + 3(b + x)}{4}\right]^4.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a tagok egyenlők: $3b - 3x = b + x$, amiből $x = b/2$ adódik. Ez azt jelenti, hogy az alap és a szár hajlásszöge $60°$.

7. A harmadik egyenletből: $b = 17 - ac$.

Ezt beírjuk a másik két egyenletbe:

$$a(17 - ac) + c = 11$$
$$c(17 - ac) + a = 13.$$

Vonjuk ki a másodikból az elsőt: $(c - a)(16 - ac) = 2$. Mivel egész számokon kell megoldani, négy eset van:

	$c - a = -2;$	$-1;$	$1;$	2
	$16 - ac = -1;$	$-2;$	$2;$	1
vagyis	$ac = 17;$	$18;$	$14;$	$15.$

Az ac és $c - a$ ismeretében a és c kiszámolható. Csak a negyedik esetben kapunk egész értéket: $a = 3$, $c = 5$, $b = 17 - ac = 2$.

8. Legyen

$$\sin^2 x = 0,5 + y,$$
$$\cos^2 x = 0,5 - y.$$

Ekkor $\sin^8 x + \cos^8 x = (0,5 + y)^4 + (0,5 - y)^4 = 0,125 + 3y^2 + 2y^4 \geq 0,125$, mert $3y^2 + 2y^4 \geq 0$. Tehát a legkisebb érték ($y = 0$ mellett): 1/8.

Számadó László, Budapest