1. Az egyenletnek $x = 3, x = -3$ és $x = 0$ kivételével minden valós számra van értelme. Az egyenlet mindkét oldalát $x(x-3)(x+3)$-mal szorozva, majd rendezve $x^2 - 8x + 15 = 0$ egyenlethez jutunk. Az adott egyenlet egyetlen megoldása $x = 5$.

2. Legyen a téglalap rövidebb oldala a, a hosszabb oldala ekkor aq, az átlóinak hossza aq^2 és nyilván $q > 1$. A Pitagorasz-tétel alkalmazásával:

$$\left(aq^2\right)^2 = (aq)^2 + a^2,$$

ahonnan a mértani sorozat hányadosa:

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Ha α és β az átlóknak az oldalakkal bezárt szögei, akkor $\operatorname{tg}\alpha = q$ és $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{q}$, $\alpha = 51,83^\circ$ és $\beta = 38,17^\circ$.

3. a) A négyzetgyök és a logaritmus értelmezése miatt $x > 0$. Alakítsuk át az egyenletet, majd vegyük mindkét oldal tízes alapú logaritmusát:

$$x^{\frac{2\lg x}{4}} = 10^2,$$

$$(\lg x)^2 = 4, \quad \lg x = 2, \quad \lg x = -2.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 100$, $x_2 = 0,01$.

b) Átalakításokkal

$$2^{2x+3} \cdot 5^{2x+3} = 2^{x+6} \cdot 5^{3x},$$

$$2^{x-3} = 5^{x-3} \tag{1}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-3} = 1.$$

Az egyenlet megoldása: $x = 3$.

4. Legyen a számtani sorozat első négy eleme $a-d, a, a+d, a+2d$. A feltételek szerint $4a + 2d = 20$ és

$$a^2 + (a+2d)^2 = 2\left((a-d)^2 + (a+d)^2\right),$$

azaz $2a + d = 10$ és $a(a-2d) = 0$.

Ha $a = 0$, akkor $d = 10$, ha $a = 2d$, akkor $a = 4, d = 2$.

A sorozat első négy eleme: -10, 0, 10, 20, vagy 2, 4, 6, 8.

5. A téglalap B csúcsa rajta van az A ponton átmenő, AD-re merőleges egyenesen, mégpedig úgy, hogy $AB = 3 \cdot AD$. Ezt a követelményt két pont (B_1, B_2) is teljesíti, amelyek koordinátáit helyvektorok alkalmazásával kaphatjuk meg, $B_1(5;9)$, $B_2(-1;-9)$. Az AB_1C_1D téglalap köré írt kör egyenlete $(x-2)^2+(y-5)^2 = 25$. Ez a kör az x-tengelyt érinti, az y-tengelyből kimetszett szakasz hossza $2\sqrt{21}$ egység. Az AB_2C_2D téglalap köré írt kör egyenlete $(x+1)^2+(y+4)^2 = 25$. Ez a kör az x-tengelyből 6, az y-tengelyből $4\sqrt{6}$ egység hosszúságú szakaszt metsz ki.

6. Legyen az AC és BD húrok metszéspotnja P és a feltételek miatt $AP = x, PC = 8x, DP = 2y, PB = 3y$. A rövidebb DC ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők, $DAC\sphericalangle = DBC\sphericalangle = \alpha$; a rövidebb AB ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők, $ADB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \delta$, és $\alpha + \delta = \frac{\pi}{2}$.

Az APD és a BPC derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$3x \cdot 8x = 3y \cdot 2y, \quad 4x^2 = y^2,$$

ezért $y = 2x$.

Jelölje O a kör középpontját. A $COD\sphericalangle = 2\alpha$, a CD ív hossza 2α, ha az α szöget radiánban mérjük. Mivel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2y}{3x} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$, $\alpha = 0,9273$, $2\alpha = 1,8546$, tehát a CD ív hossza 1,855 egység. $AB = 2\delta = \pi - 2\alpha = 1,287$ egység.

Hasonlóan adódik, hogy

$$AD = 0,928 \text{ egység, és } BC = 2,214 \text{ egység.}$$

7. Jelölje a téglatest alapéleinek hosszát x és y, az oldalélének hosszát z. A feltételek szerint

$$xy = 4 \qquad x + y + z = 10.$$

A téglatest felszíne

$$A = 2(4 + (x + y)z) = 2(4 + (10 - z)z) = 58 - 2(z - 5)^2, \text{ ahol } 0 < z < 10.$$

Látható, hogy $A \leq 58$, és az egyenlőség, a maximális felszínérték (58), akkor adódik, ha $z = 5$.

Ekkor $x + y = 5$ (és $xy = 4$).

A maximális felszínű téglatest élei: 1, 4, 5 egység, a maximális felszín 58 területegység.

8. Az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés

$$\frac{2}{(y-2)^2 + 2} \geq \frac{2}{0+2} = 1$$

;

az 1 értéket csak $y = 2$ esetén veszi fel.

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenségből következik, hogy $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$ és $a^2 + \frac{1}{a^2}$ csak akkor 2, ha $a^2 = 1$.

Ezek szerint

$$\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \geq 2,$$

ahol az egyenlőség $\cos^2(xy) = 1$ esetén teljesül.

A megoldandó egyenlet bal oldalán álló kifejezésnek akkor van értelme, ha $\cos^2(xy) \neq 0$. A kettő alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért

$$\log_2 \left(\cos^2(xy) + \frac{1}{\cos^2(xy)} \right) \geq \log_2 2 = 1,$$

és az 1 értéket $\cos^2(xy) = 1$ esetén veszi fel.

Az egyenletnek tehát azok a valós $(x; y)$ számpárok a megoldásai, amelyekre mindkét oldal helyettesítési értéke 1.

Így $y = 2$ és $\cos^2(2x) = 1$, azaz

$$\frac{1 + \cos 4x}{2} = 1, \quad \cos 4x = 1, \quad 4x = 3k\pi, \quad x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Az adott egyenletet az $x = k \cdot \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), y = 2$ számpárok elégítik ki.

Rábai Imre, Budapest