Legyen $\frac{1}{2}x^2+px+q=f(x)$. Az $f(x)$ másodfokú függvény főegyütthatója $^1/_2$, pozitív, ezért grafikonja az y tengellyel párhuzamos tengelyű, felfelé nyitott parabola. A grafikon az x tengelyhez képest 3-féleképpen helyezkedhet el: vagy fölötte van, vagy érinti, vagy 2 pontban metszi, a gyökök számától függően. Az előbbi két esetben minden függvényérték nem negatív, az utóbbi esetben a függvénynek 2 gyöke van, a két gyök közötti helyeken a függvényérték negatív, a gyökökön kívül pozitív (vö. gimnáziumi tankönyv, II. o., 194–198. o.).

Elegendő belátnunk, hogy az α és β helyen felvett függvényértékek különböző előjelűek. Ebből már következik, hogy a harmadik eset áll fenn, $f(x)$-nek van két különböző gyöke, közülük az egyik α és β közé esik. Az $f(\alpha)$ és $f(\beta)$ számok előjelét egyszerűen meghatározhatjuk, figyelembevéve, hogy α ill. β megadott egyenletek gyökei:

$$f(\alpha)=\alpha^2+p\,\alpha+q-\frac{1}{2}\,\alpha^2=-\frac{1}{2}\,\alpha^2\le 0,$$
$$f(\beta)=-\beta^2+p\,\beta+q+\frac{3}{2}\,\beta^2=\frac{3}{2}\,\beta^2\ge 0,$$

amivel az állítást igazoltuk.

Ha $q=0$, akkor α és β 0 is lehet. Az $\frac{1}{2}x^2+px=0$ egyenlet gyökei 0 és $-2p$, közülük a 0 valóban α és β közé esik, ha α-t és β-t is α és β közötti számnak tekintjük.

Brindza Béla (Csongrád, Batsányi J. Gimn., IV. o. t)

Megjegyzés. Mint az 1959. feladat megoldásában (51. kötet, 3–4. szám, 115. oldal), most is hivatkozhattunk volna Bolzano tételére, mely szerint az $[a,\,b]$ zárt intervallumon folytonos $f(x)$ függvény értékkészletének része az $f(a)$ és $f(b)$ számok által közrefogott intervallum.