1. Az első egyenlet $(x-y)^2=9$, tehát $x-y=3$, vagy $x-y=-3$.

Ha $x=y+3$, akkor ezt a második egyenletbe helyettesítve, $y^2+3y+2=0$, így $y_1=-1$, $x_1=2$, vagy $y_2=-2$, $x_2=1$.

Ha $x=y-3$, akkor $y^2-3y+2=0$, $y_3=1$, $x_3=-2$, vagy $y_4=2$, $x_4=-1$.

Megjegyzés. Adjuk hozzá az első egyenlet (-2)-szeresét a második egyenlethez, ekkor $2x^2+5xy+2y^2=0$, azaz $x=-2y$ vagy $y=-2x$. Ezekhez társítva az $(x-y)^2=9$ egyenletet, szintén megkaphatjuk a megoldásokat.

2. Legyen $T_{ABCN}=t$. A szögfelező osztásarány tétele miatt $T_{ABD}=\dfrac{3}{7}t$, ugyanezért $T_{AED}=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{3}{7}t=\dfrac{1}{4}t$.

3. A szóban forgó összegek $S_1=\dfrac{n(2n-1)}{2}$, illetve $S_2=\dfrac{n(4n+2)}{2}$; a feltétel szerint

$$\frac{3n-1}{4n+2}=\frac{5}{7},$$

ahonnan $n=17$.

4. $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$, tehát mindig pozitív értéket vesz fel. Az

$$1\le\frac{2x^2-6x+6}{x^2-4x+5}\le 3$$

tehát pontosan akkor teljesül, ha

$$(1)\quad x^2-4x+5\le 2x^2-6x+6\quad\text{és}\quad(2)\quad 2x^2-6x+6\le 3x^2-12x+15.$$

Az (1) ekvivalens az $(x-1)^2\ge 0$ egyenlőtlenséggel, a (2) ekvivalens az $(x-3)^2\ge 0$ egyenlőtlenséggel, tehát minden valós x-re teljesül az állítás.

5. A nyolcszögnek van két olyan szomszédos oldala, amelyek hossza 1, illetve 3 egység. Legyen $AB=1$, $BC=3$ egység, a kör középpontja O. Az $AOC\sphericalangle=90^\circ$. Jelölje r a kör sugarát. Ekkor $AC=r\sqrt{2}$. Most a hosszabb AC ívhez tartozó középponti szög 270°, így az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle=135^\circ$. A koszinusztétel alkalmazásával

$$2r^2=1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\qquad\text{ahonnan}$$

$$r^2=5+1,5\cdot\sqrt{2},\qquad r\approx 2,67\text{ egység.}$$

6. Ha a keresett kör középpontja a $K(u,v)$, akkor a K pont a három egyenestől egyenlő távolságra van, azaz

$$|u|=|v|=\frac{1}{5}|3u+4v-10|.$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Így} & u=v & \text{és} & \frac{1}{5}(3u+4v-10)=u,\\
\text{vagy} & u=v & \text{és} & \frac{1}{5}(3u+4v-10)=-u,\\
\text{vagy} & -u=v & \text{és} & \frac{1}{5}(3u+4v-10)=u,\\
\text{vagy} & -u=v & \text{és} & \frac{1}{5}(3u+4v-10)=-u,
\end{array}$$

ahonnan $u_1=5$, $v_1=5$, $r_1=5$, vagy $u_2=\dfrac{5}{6}$, $v_2=\dfrac{5}{6}$, $r_2=\dfrac{5}{6}$, vagy $u_3=-\dfrac{5}{3}$, $v_3=\dfrac{5}{3}$, $r_3=\dfrac{5}{3}$, vagy $u_4=\dfrac{5}{2}$, $v_4=-\dfrac{5}{2}$, $r_4=\dfrac{5}{2}$.

A feltételeknek tehát négy kör felel meg, ezek egyenlete:

$$(x-5)^2+(y-5)^2=25,\qquad\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36},$$

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9},\qquad\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

7. Ha $m=0$, akkor nincs megoldás. Ha $m\ne 0$, akkor $12\sin^4 x-12\sin^2 x+\dfrac{2m}{3}=0$. A diszrimináns nem-negatív, azaz $D=12^2-4\cdot 12\cdot\dfrac{2m}{3}=16(9-2m)\ge 0$, ha $m\le\dfrac{9}{2}$.

Mivel $0\le\sin^2 x\le 1$, azért a

$$0\le\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{9-2m}\le 1,\qquad 0\le\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{9-2m}\le 1$$

egyenlőtlenségek közül legalább az egyiknek teljesülnie kell. Az egyenletnek így akkor van megoldása, ha $0 < m \leq \frac{9}{2}$. Ha $m = \frac{9}{2}$, akkor $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, $x_n = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

8. Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, és $x_2 = 3x_1$, akkor a gyökök és együtthatók közötti összefüggések alapján $4x_1 = -\frac{b}{a}$ és $3x_1^2 = \frac{c}{a}$, ahonnan $3 \cdot \frac{b^2}{16a^2} = \frac{c}{a}$, így $4ac = \frac{3}{4}b^2$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = b^2 - 4ac = b^2 - \frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2$.

Fordítva, legyen $D = \frac{1}{4}b^2$, ekkor $x_{1,2} = \frac{-b \pm \frac{1}{2}b}{2a}$, $x_1 = -\frac{1}{4}\frac{b}{a}$, $x_2 = -\frac{3}{4}\frac{b}{a}$, így valóban $x_2 = 3x_1$.

Rábai Imre