A könnyebb kezelhetőség céljából a végtelen sakktábla mezőit a mezők középpontjaival képviseltetjük. Ezen középpontoknak egy síkbeli derékszögű koordináta–renszerben azokat a pontokat tekintjük, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám. A huszár induljon az origóból.

A sakktáblán sötét és világos mezők váltogatják egymást. Megállapíthatjuk, hogy mindazok a rácspontok, amelyek koordinátáinak összege páros, ugyanolyan színű mezőket képviselnek, mint az origó. Azok a rácspontok pedig, amelyek koordinátáinak összege páratlan, az origóval ellenkező színű mezőknek felelnek meg.

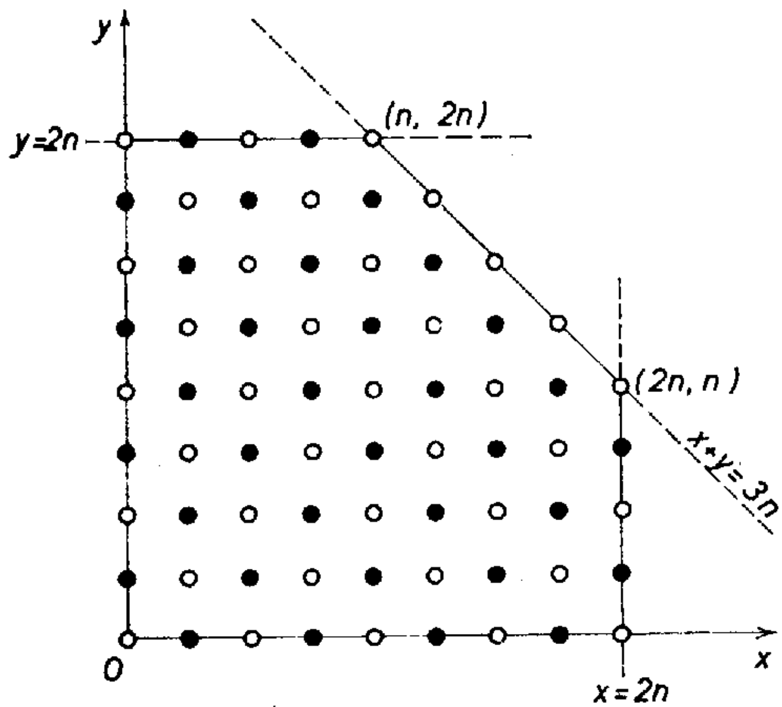
Mivel a huszár minden lépésekor a rácspont egyik koordinátájának paritása változatlan marad, a másiké pedig megváltozik, az elért rácspont színe minden lépésnél megváltozik. Ebből következik, hogy a huszár páros számú lépéssel csak az origó színével egyező színű rácspontokra érkezhet, páratlan számú lépéssel pedig csak az ellenkező színűekre.

Valamely adott számú lépés után elérhető rácspontok közös színét az adott számú lépés esetén a továbbiakban „megfelelő szín”-nek nevezzük.

A következőkben először is azt vizsgáljuk, hogy hol húzódik az a határ, amelyet az n-edik lépésben a huszár elérhet, de nem léphet túl. Ezt elég az első síknegyedben megállapítani, mivel a négy síknegyed teljesen egyenrangú.

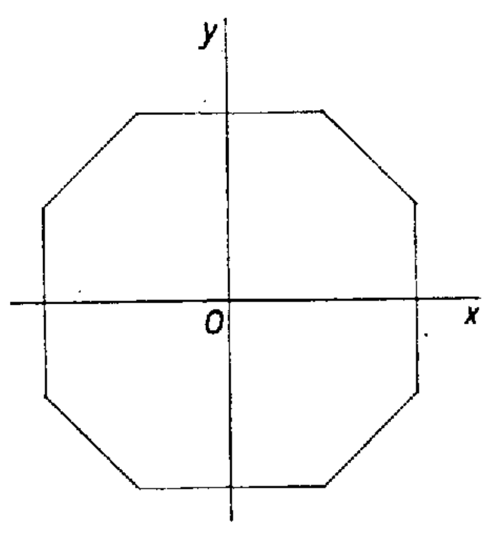
Az n lépéssel elérhető szélső pontokban x legfeljebb $2n$ lehet, y szintén $2n$, Ugyanakkor azonban $x + y$ legfeljebb $3n$ lehet, mivel a két koordináta összege minden lépésben legfeljebb 3-mal növekedhet.

Az első síknegyednek azokat a rácspontjait, amelyek mindhárom feltételnek eleget tesznek, az 1. ábrán látható tartomány (a határát is beleértve) tartalmazza.



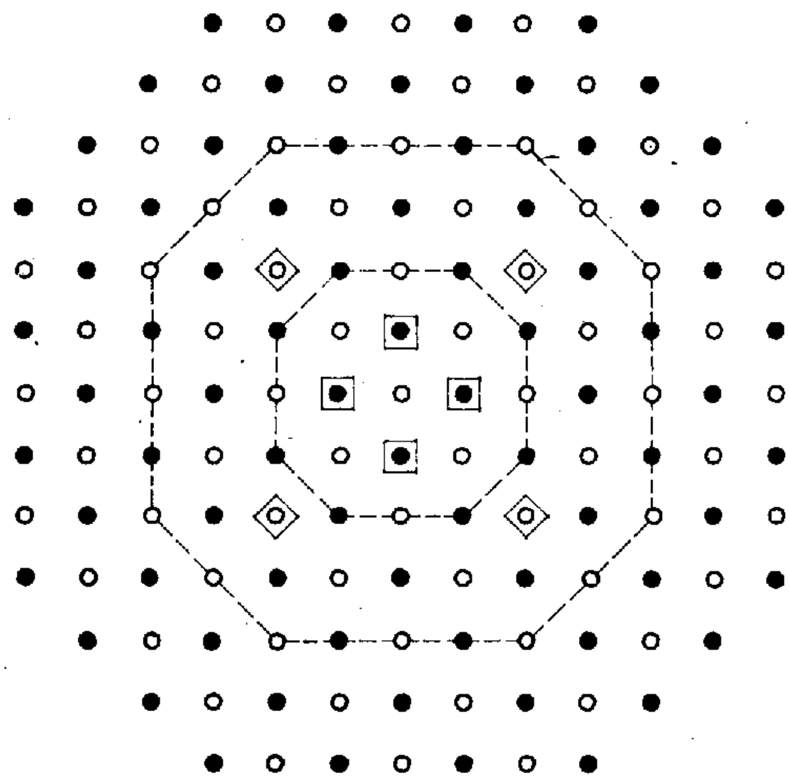
1. ábra

A tartományt a tengelyekre és az origóra tükrözve olyan nyolcszög adódik, amelyen kívüli rácspontokba n (vagy n-nél kevesebb) lépéssel nem juthatunk (2. ábra). Jelöljük ezt a nyolcszöget T_n-nel.



2. ábra

Nevezzük T_n-t telítettnek, ha a huszár az n-edik lépésben T_n minden megfelelő színű rácspontjába megérkezhet. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy T_1 és T_2 nem telített, T_3 viszont igen (3. ábra).

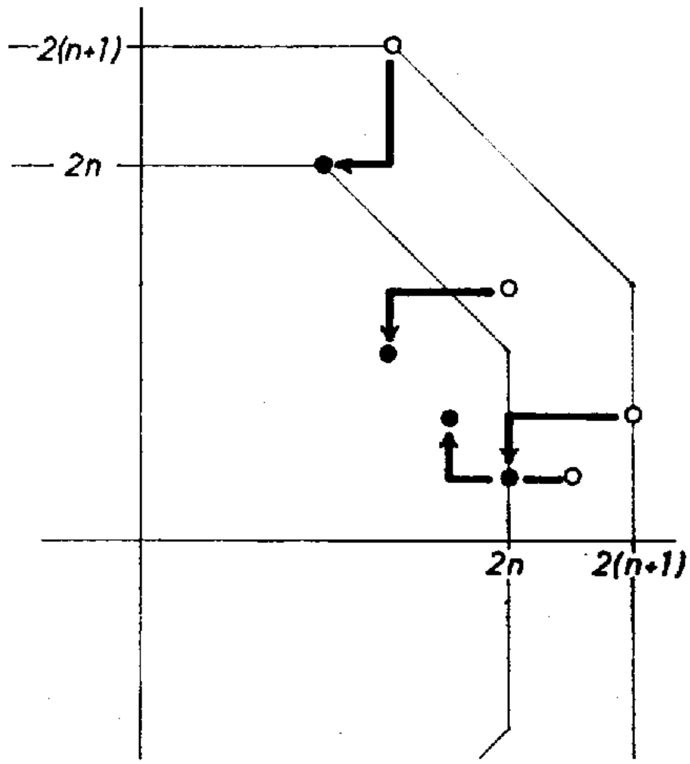


3. ábra

T_1-ben és T_2-ben is 4 olyan megfelelő színű rácspontot találunk, amelyek 1 ill. 2 lépéssel nem érhetők el (bekeretezett sötét ill. világos pontok).

A teljes indukció módszerével bebizonyítjuk, hogy T_n minden $n \geq 3$ esetén telített. Mivel T_3-ról már tudjuk, hogy telített, azt kell még bebizonyítanunk, hogy ha T_n telített, akkor T_{n+1} is az. Ehhez azt bizonyítjuk, hogy ha T_{n+1} nem telített, akkor T_n sem telített.

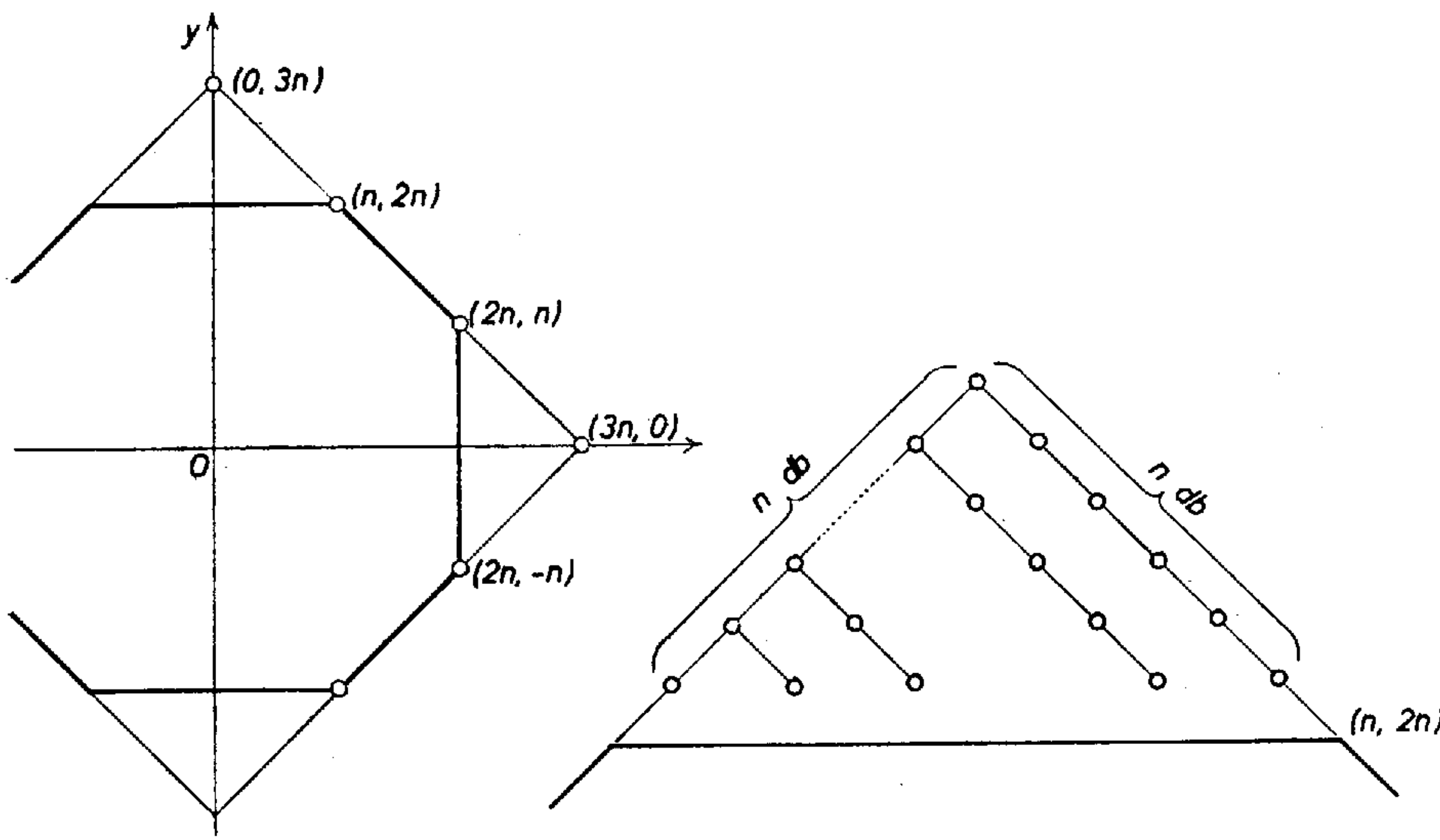
Ha van olyan megfelelő színű rácspont T_{n+1}-ben, amelyre a huszár az $(n+1)$-edik lépésben nem érkezhet meg, akkor nyilván nem lehet ettől lóugrásnyira olyan rácspont, amelyre az n-edik lépésben megérkezhet. Viszont a T_{n+1}-ben levő bármely rácsponttól lóugrásnyira fekvő rácspontok között mindig van legalább egy, amely T_n-ben is benne van (4. ábra).



4. ábra

Akkor a T_{n+1}-ben megfelelő színű rácspontoktól lóugrásnyira fekvő rácspontok között is van ilyen, s ez T_n-ben megfelelő színű. Tehát T_n nem telített. Azaz a telítettség T_n-ről T_{n+1}-re öröklődik, T_n valóban minden $n \geq 3$ esetén telített.

Most már csak össze kell számolnunk T_n-ben a megfelelő színű rácspontokat (5. ábra).



5. ábra

A nyolcszög oldalai csupa megfelelő színű rácspontot tartalmaznak. Az átlós oldalak egyenesei egy négyzetet zárnak közre, amelynek minden oldalán $(3n+1)$ darab megfelelő színű rácspont található. Ezért ez a négyzet $(3n+1)^2$ darab megfelelő színű rácspontot tartalmaz. A T_n tartomány ennél $\left(4\sum_{i=1}^{n} i\right)$-vel kevesebbet, hiszen mind a négy levágott sarokban egyaránt $\sum_{i=1}^{n} i$ darab megfelelő színű rácspont van.

Végeredményben az n-edik lépésben elérhető rácspontok (mezők) száma

$$L_n=(3n+1)^2-4\,\frac{1+n}{2}\cdot n=7n^2+4n+1,\quad \text{ha}\quad n\ge 3;$$

$n=1$ és $n=2$ esetén pedig a képlet által megadott számnál 4-gyel kevesebb, vagyis $L_1=8$ és $L_2=33$.

Torma József (Budapest, Apáctai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A végtelen sakktáblán az egyik mezőről a másik mezőre vezető lehető legkevesebb lóugrás számát nevezhetjük a két pont távolságának. Hogy milyen alapon nevezhetjük az így definiált mennyiséget távolságnak és milyen ezen a síkon egy egyenes, az kiderül *Kárteszi Ferenc: Egy különös geometria* c. cikkéből (KÖMAL 9. kötet (1954) 71–78. o.). A cikkhez kapcsolódott 644. és 652. feladatunk (szintén a 9. kötetben, megoldásuk a 10., ill. 11. kötetben jelent meg). Az utóbbi mostani feladatunkhoz igen hasonló kérdést vizsgált. A feladat szövege ez volt: A végtelen sakktábla kijelölt mezejéhez hány olyan mező tartozik, amely n lóugrással érhető el – de annál kevesebbel már nem?

2. Többen helyesen adták meg az elérhető mezők számát, de nem bizonyították, hogy azok az n-edik lépésben el is érhetők. Mások a mezők megszámolásánál hibáztak. Megint mások – félreértve a feladatot – lényegében a 652. feladat kérdésére válaszoltak.

3. A feladat n helyett $2n$-nel megoldásával együtt megtalálható N. J. Vilenkin: Kombinatorika c. könyvében (374. feladat, 244. old.).