1. a) A terület nyilván $8 \cdot 4 = 32$ területegység. b) Mivel az $ACB\sphericalangle = 90^\circ$, azért AB a trapéz köré írt körének átmérője. Legyen a C pont vetülete az AB oldalon $C', C'B = x, CB = y$. Az ABC derékszögű háromszögben alkalmazhatjuk a magasságtételt és a befogótételt. Ezek szerint $4^2 = 8 \cdot x, x = 2$ egység, így $AB = 10$ egység, a köré írt kör suga 5 egység; $y^2 = 2 \cdot 10, y = 2 \cdot \sqrt{5}$ egység.

A trapéz kerülete: $K = 2 \cdot 8 + 2y = 16 + 4 \cdot \sqrt{5}$ egység.

2. Az adott egyenlet diszkriminánsa $D = 4(8k^2 + k + 106)$, mindig pozitív (miért?), így mindig két különböző valós gyöke van. A gyökök pontosan akkor különböző előjelűek, ha szorzatuk negatív, azaz ha $x_1x_2 = k^2 + 11k - 102 < 0$, ami $-17 < k < 6$ esetén teljesül.

Megjegyzés: Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet esetén $\dfrac{c}{a} < 0$, akkor $ac < 0$, így a diszkrimináns $D = b^2 - 4ac > 0$; tehát $ac < 0$ esetén mindig két különböző valós gyöke van az egyenletnek.

3. Mivel $\sin \dfrac{11\pi}{2} = -1$ és $\cos 2x - 2\cos^2 x = -1$, ezért a $\sin 2x + |\sin x| = 0$ egyenletet kell megoldani a $[0; 2\pi]$ intervallumon.

Ha $0 \leq x \leq \pi$, akkor $|\sin x| = \sin x$, így $(2\sin x)\left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right) = 0, \sin x = 0$ vagy $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, tehát $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ha $\pi < x \leq 2\pi$, akkor $|\sin x| = -\sin x$, így $(2\sin x)\left(\cos x - \dfrac{1}{2}\right) = 0, \sin x = 0$ vagy $\cos x = \dfrac{1}{2}$, tehát $x_4 = \dfrac{5\pi}{3}, x_5 = 2\pi$.

4. Az egyenletnek akkor van értelme, ha $x + 2 > 0$ és $9 - x^2 > 0$, azaz ha $-2 < x < 3$.
Azonos átalakításokkal

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}.$$

Az $\dfrac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, tehát

$$\sqrt{x+2} > \frac{1}{2}\sqrt{9 - x^2}.$$

Mivel mindkét oldalon nemnegatív szám áll, ezért négyzetreemelés, majd rendezés után

$$4x + 8 > 9 - x^2, \qquad x^2 + 4x - 1 > 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldásai tehát

$$\sqrt{5} - 2 < x < 3.$$

5. a) A tört számlálója pozitív állandó, a nevezője is mindig pozitív értéket vesz fel. Így a tört értéke akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb.

Ismeretes, hogy ha $A > 0$ és $B > 0$, akkor $A + B \geq 2\sqrt{AB}$. Most $2^{-x} + 2^{x+2} \geq 2\sqrt{2^{-x} \cdot 2^{x+2}} = 4$. Az egyenlőség $2^{-x} = 2^{x+2}, -x = x + 2, x = -1$ esetén áll fenn.

A tört legnagyobb értéke $\dfrac{16}{4} = 4$, amit $x = -1$ esetén vesz fel.

b) Ismeretes, hogy $a^2 + b^2 \geq 0, a^2 + b^2 + k \geq k$, ha $k \geq 0$, így $-a^2 - b^2 \leq 0$ és $k - a^2 - b^2 \leq k$, ahol az egyenlőségek $a = 0, b = 0$ esetén állnak fenn.

Most ha $a = x^2 - 4, b = 1 + x - \log_2 y$ és $k = 4$, akkor mivel

$$-x^4 + 8x^2 - 12 - (1 + x - \log_2 y)^2 = 4 - (x^2 - 4)^2 - (1 + x - \log_2 y)^2 \leq 4.$$

A kifejezés legnagyobb értéke 4, amit akkor vesz fel, ha $x^2 - 4 = 0$ és $1 + x - \log_2 y = 0$, azaz ha $x_1 = 2, y_1 = 8$ vagy $x_2 = -2, y_2 = \dfrac{1}{2}$.

6. Nyilván $\beta \neq 90^\circ$ és $\gamma \neq 90^\circ$.

Az igazolás során a következő ismert azonosságokat alkalmazzuk: $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\beta + \gamma), \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$.

A feltételi egyenlettel ekvivalensek a következő egyenletek:

$$\sin 2\gamma + \sin 2\beta = 4\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$2\sin(\beta + \gamma)\cos(\beta - \gamma) = 4\sin(\beta + \gamma)\cos\beta\cos\gamma.$$

Most $\sin(\beta+\gamma)>0$, tehát $2\sin(\beta+\gamma)$ -val lehet osztani.

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma&=2\cos\beta\cos\gamma,\quad \textit{azaz}\\ \cos(\beta+\gamma)&=0\\ \beta+\gamma&=90^\circ,\quad \text{azaz } \alpha=90^\circ,\end{aligned}$$

tehát a háromszög valóban derékszögű.

7. Az E érítési pont ordinátája 9, abszcisszája a $3x-4\cdot 9=-45$ egyenletből $x=-3$. A keresett kör(ök) középpontja rajta van az E pontban az adott egyenesre merőleges egyenesen, amelynek egyenlete $4x+3y=15$.

Az adott egyenes az x tengelyt a $G(-15;0)$ pontban metszi. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $GE=GF_1=GF_2$, ahol F_1 és F_2 azok a pontok, amelyekben a szóban forgó kör(ök) az x-tengelyt érinti(k). Most $GE=15$, így $F_1(-30;0), F_2(0,0)$. Ha a keresett körök középpontja $(4;5)$, akkor $4n+3v=15$ és $n_1=-10, n_2=0$; tehát $v_1=45, r_1=45$ és $v_2=5$, $r_2=5$. A feltételeknek megfelelő körök egyenlete:

$$(x+30)^2+(y-45)^2=45^2,$$

illetve

$$x^2+(y-5)^2=25.$$

8. Az állítás teljes indukcióval bizonyítható. A megoldás során felhasználjuk az (ugyancsak teljes indukcióval igazolható)

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+n^3&=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\\ 1^2+2^2+\cdots+n^2&=\frac{n(n+1)(2n+1}{6}\ \text{és}\\ 1+2+\cdots+n&=\frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

azonosságokat. Mivel $k(k+1)(2k+1)=2k^3+3k^2+k$, ezért

$$\begin{aligned}&1\cdot 2\cdot 3+\cdot 2\cdot 3\cdot 5+\cdots+n(n+1)(2n+1)=\\ &=(2\cdot 1^3+3\cdot 1^2+1)+(2\cdot 2^3+3\cdot 2^2+2)+\cdots+(2n^3+3n^2+n)=\\ &=2(1^3+2^3+\cdots+n^3)+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)=\\ &=2\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\\ &=\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2).\end{aligned}$$

Rábai Imre