Az 1993. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Legyen a és b két pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy legfeljebb véges sok n egész szám esetén lehet an^2+b és $a(n+1)^2+b$ egyaránt négyzetszám.*

I. megoldás. Tegyük fel, hogy az n egész, és x és y pozitív egész számokra teljesül, hogy

$$an^2+b=x^2, \qquad \text{és} \qquad a(n+1)^2+b=y^2. \tag{1}$$

A megfelelő oldalak különbségét képezve és az n-et tartalmazó tagot kifejezve

$$2an=y^2-x^2-a.$$

Ezt az első egyenlőség $4a$-szorosába helyettesítve és rendezve a következőt kapjuk:

$$x^4-2x^2y^2+y^4-2a(x^2+y^2)+a^2+4ab=0.$$

Mind a két oldalhoz $4x^2y^2$-et hozzáadva a bal oldalon az utolsó tag kivételével teljes négyzet keletkezik. Ezt mind a két oldalból levonva a jobb oldal szorzattá alakítható:

$$4ab=(2xy-x^2-y^2+a)(2xy+x^2+y^2-a).$$

A bal oldal egy felbontását kaptuk tehát két egész tényező szorzatára. A kínálkozó teljes négyzetté alakításokkal

$$a-(x-y)^2=q_1, \quad (x+y)^2-a=q_2, \quad \text{ahol} \quad q_1q_2=4ab.$$

Innen kiszámítható x és y. Ha ezek egész számnak adódnak, akkor pl. az (1) első egyenlőségéből n-re legfeljebb két egész értéket kapunk. A feladat követelményeit tehát legfeljebb négyszer annyi n érték elégíti ki, mint ahányféleképpen $4ab$ két tényező szorzatára bontható, tehát valóban véges sok.

Megjegyzések. 1. Könnyű olyan polinomot találni, amelyikhez van a feltételeket kielégítő n érték. A $3n^2+1$ polinom értéke például a 0 és 1 helyen 1, ill. 4.

2. Nem lényeges a és b pozitív volta, csak az, hogy egyik sem 0, hiszen okoskodásunk akkor is helyes marad, ha a $4ab$ szorzat negatív, és ha a felbontásnál negatív tényezőket is megengednünk.

A feladat állítása érvényes ennél is általánosabban minden egész együtthatós ax^2+bx+c másodfokú polinomra, amelyik nem elsőfokúnak a négyzete. Az elsőfokú tag elhagyása csak a számolási bonyodalmak csökkentését szolgálta. Valóban, ha ennek a polinomnak az értéke az n helyen is, az $n+1$ helyen is négyzetszám, akkor a fentihez hasonlóan számolva

$$2an+a+b=y^2-x^2.$$

Innen $2an$-et a

$$4a^2n^2+4abn+4ac=4ax^2$$

egyenlőségbe helyettesítve megfelelő átrendezés után az

$$y^4-2x^2y^2+x^4-2a(x^2+y^2)+a^2+4ac-b^2=0$$

egyenlőséghez jutunk. Az, hogy a polinom nem elsőfokú négyzete, azt jelenti, hogy $4ac-b^2\neq 0$, és így innen már ugyanúgy okoskodhatunk tovább, mint a fenti megoldásban.

3. A lehetséges n értékek számára nyerhetnénk kisebb korlátot, de a célunk csak ilyen korlát létezésének a bizonyítása volt.

II. megoldás. Az bizonyítjuk, hogy a feladat állítása igaz minden 0-tól különböző a,b egészre. Ha $a<0$, akkor an^2+b negatív, amint n^2 elég nagy, $\left(n^2>\dfrac{b}{-a}\right)$, tehát legfeljebb véges sok egész n-re lehet négyzetszám az értéke. Elég tehát azt az esetet vizsgálni, ha $a>0$.

Az (1) alatti két egyenlőség bal oldalának a szorzata

$$a^2n^2(n+1)^2+2ab(n^2+n)+ab+b^2=(an(n+1)+b^2)+ab.$$

Ez feltétel szerint négyszetszám. Ez nem lehetséges akkor, ha $b>0$ esetén a jobb oldal kisebb, mint $(an(n+1)+b+1)^2$, illetve ha $b<0$ esetén nagyobb, mint $(an(n+1)+b-1)^2$. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel mind a két esetben teljesül, amint n elég nagy.

Ha $b>0$, akkor a feltétel

$$2an^2+2an+2b+1-ab>0$$

alakra hozható. Ekvivalens egyenlőtlenségre jutunk, ha mind a két oldalt megszorozzuk pozitív $2a$ számmal. Ekkor megfelelő átalakításokkal a

$$(2an+a)^2>2a^2b+a^2-4ab-2a$$

egyenlőtlenségre jutunk, ez pedig minden elég nagy abszolútértékű n-re teljesül, mivel a jobb oldal nem függ n-től.

Ha $b<0$, akkor
$$2an^2+2an+2b-1+ab>0$$
alakra hozható a feltétel és ez ismét minden elég nagy abszolútértékű n-re teljesül.

Megjegyzés. Ez a megoldás is alkalmazható lényes változtatás nélkül tetszés szerinti másodfokú polinomra, amelyik nem elsőfokú négyzete, csak lényegesen többet kell számolni.

III. megoldás. Ismét az előző megoldásban nyert állítást bizonyítjuk, de mint ott, most is elég azt az esetet vizsgálni, ha $a>0$.

Feltehetjük azt is, hogy $n\geq 0$, mert n-nel együtt $-n-1$ is kielégíti a feltételeket, és a kettő közül az egyik nem negatív.

Tegyük fel, hogy
$$an^2+b=r^2,\quad a(n+1)^2+b=(r+s)^2.$$
valamilyen pozitív egész r és s számmal. Ekkor
$$(2n+1)a=2rs+s^2>2rs.$$
Pozitív egész számokról lévén szó, ez akkor és csak akkor teljesül, ha
$$(2n+1)^2a^2>4r^2s^2=4(an^2+b)s^2.$$
Innen, mivel an^2+b pozitív négyzetszám,
$$s^2<\frac{(2n+1)^2a^2}{4an^2+4b}\leq\frac{(2a+a/n)^2}{4a-4|b|/n^2}\leq\frac{(2a+1)^2}{4a-4},$$
ha n nagyobb a-nál is, $\sqrt{|b|}$-nél is. Így s az ezen határ fölötti n-ekre csak véges sok különböző értéket vehet fel.

Minden ilyen s-re négyzetre emelve a $(2n+1)a-s^2=2rs$ egyenlőség két oldalát és felhasználva r jelentését
$$4a^2n^2+4a^2n+a^2-4as^2n-2as^2+s^4=4r^2s^2=4as^2n^2+4bs^2.$$
Ezt n hatványai szerint rendezve
$$4a(a-s^2)n^2+4a(a-s^2)n+a^2-2as^2+s^4-4bs^2=0.$$
Eszerint minden szóbajövő s értékhez legfeljebb két megfelelő n érték létezhet, ha $s^2\neq a$.

Nem lehet viszont $s^2=a$, mert ekkor egyenlőségünk azt adná, hogy $4ab=0$, ami nem teljesülhet, mert sem a, sem b nem 0. Az n-re adott korlátok alatt összesen is csak véges sok nem negatív egész van. Ezzel a bizonyítandó állítást nyertük.

2. *Az ABC háromszög oldalai különböző hosszúságúak. A háromszögbe írt kör a BC,CA,AB oldalakat rendre a K,L,M pontban érinti. A B-n át LM-mel párhuzamosan húzott egyenes és KL metszéspontja D, a C-n át LM-mel párhuzamosan húzott egyenes és KM metszéspontja pedig E.*

Bizonyítsuk be, hogy DE átmegy az LM szakasz felezőpontján.

I. megoldás. Az ALM háromszög egyenlő szárú. Így, ha AB és AC különböző, akkor a B-ből és a C-ből LM-mel párhuzamosan húzott egyenes is különböző. A velük nem párhuzamos KM egyenes metszi őket, így a D és E pont létrejön (*1. ábra*).

Jelöljük BD és AC metszéspontját B'-vel, CE és AB metszéspontját C'-vel. Ekkor egyenlőszárú az ALM-hez hasonló $AB'B$ és az ACC' háromszög is. B'-n és C'-n át párhuzamost húzunk a BC oldallal. Az előbbi és KL metszéspontját G-vel, az utóbbi és KM metszéspontját H-val jelölve a BDK és a $B'DG$ háromszög egybevágó, mert megfelelő szögeik csúcsszögek vagy váltószögek. Belátjuk továbbá, hogy $B'G=BK$. Ugyanis a $GB'L$ és KCL háromszög hasonló, és az utóbbi két oldala a C-ből a beírt körhöz húzott két érintőszakasz, ezért $B'G=B'L$. Utóbbi és BM viszont egyenlő szakaszok különbsége, így szintén egyenlők. Végül BM és BK a B-ből húzott két érintőszakasz, így egyenlők. Ekkor azonban a többi oldalpár is egyenlő, így $BD=B'D$, vagyis D a BB' szakasz felezőpontja.

Ugyanígy látjuk be, hogy E a CC' szakasz felezőpontja. A CKE és a $C'HE$ háromszög egybevágó, miután megfelelő szögeik csúcsszögek vagy váltószögek, továbbá egy pontból húzott érintőszakaszok egyenlő volta következtében a KBM háromszöghöz hasonló $HC'M$ háromszög egyenlő szárú, s így $HC'=C'M=CL=CK$. Ekkor a háromszög többi oldalpárja is egyenlő, így $CE=C'E$.

Ezekből már következik, hogy a DE egyenes a $BAC\sphericalangle$ szárai közti harmadik párhuzamos szakaszt, KM-et is felezi, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzések. 1. Világos, hogy ez az egyenes az A csúcsból induló szögfelező.

2. Mint többen is megjegyezték, a bizonyításban csak az AB és AC oldal különböző voltára volt szükség.

3. Könnyen látható, akár ennek, akár a következő megoldásoknak a gondolatmenetével, hogy helyes marad az állítás akkor is, ha a beírt kört a háromszög egyik oldalát kívülről érintő körrel helyettesítjük. Az AB vagy az AC oldalhoz hozzáírt kör esetén D és E a külső szögfelezőn lesz.

A versenyzők sok különböző megoldást adtak a feladatra. Sokan használták fel Menelaos tételét, illetőleg annak a megfordítását. Volt, aki koordinátákkal számolt. A fenti megoldás mindegyiknél sokkal egyszerűbb. Miután azonban ez a megoldás csak egyetlen versenyzőnél szerepelt, bemutatunk még két további megoldást.

II. megoldás. Válasszuk a jelölést úgy, hogy $AB < AC$ teljesüljön. Ekkor D a KL szakaszon van, E az MK szakasz K-n túli meghosszabításán. Jelöljük a háromszögbe írt kört k-val.

Azt mutatjuk meg, hogy D és E az LM szakasz felező merőlegesén van, vagyis hogy DLM és az ELM háromszög egyenlő szárú, mivel L-nél és M-nél levő szögeik egyenlők (*2. ábra*).

Az AML, BKM és CLK háromszög egyenlő szárú, mert két-két oldaluk a csúcsokból k-hoz húzott érintőszakasz. Az alapon levő szögeiket jelöljük α, β, illetőleg γ-val. Ezek egyenlők a KLM háromszög K-nál, L-nél, illetőleg M-nél levő szögével, mert k-nak ugyanazt az ívét tartalmazó húr-érintő szögek, illetőleg kerületi szögek. Így összegük 180°.

B, K, D és M egy k_1 körön van, mert az $LKM\sphericalangle, LMA\sphericalangle$, és $DBM\sphericalangle$ egyenlő és egyező irányítású. Az első és a második azért, mert az első kerületi szög, a második húr-érintő szög k-ban, és az első száruktól a másodikig a kör ugyanazon irányított íve fut; a második és a harmadik szög szárai pedig egyirányban párhuzamosak. Így a két szög csúcsa és a megfelelő szárak egyeneseinek a metszéspontja egy körön van.

Ekkor $BMD\sphericalangle = CKL\sphericalangle = \gamma$, mert a száregyeneseik közti (csúcs-) szögtartomány egyaránt k_1 B-től K-n át D-ig futó ívét tartalmazza. Ennek folytán

$$LMD\sphericalangle = 180° - BMD\sphericalangle - LMA\sphericalangle = 180° - \gamma - \alpha = \beta = MLD\sphericalangle,$$

tehát LDM egyenlő szárú háromszög.

Hasonlóan C, K, E és L is egy k_2 körön van, mert $LKM\sphericalangle, ALM\sphericalangle$ és $ACE\sphericalangle$ egyenlő és egyező irányítású ugyanolyan okokból, mint az előbb.

Ekkor $ELC\sphericalangle = EKC\sphericalangle = MKB\sphericalangle = \beta$, mert az első és a második k_2 ugyanazon ívét tartalmazó kerületi szög k_2-ben, a második és a harmadik pedig csúcsszög-pár. Így

$$MLE\sphericalangle = 180° - ALM\sphericalangle - ELC\sphericalangle = 180° - \alpha - \beta = \gamma = EML\sphericalangle,$$

tehát az ELM háromszög is egyenlő szárú. Eszerint az LM szakasz felező merőlegese átmegy D-n is, E-n is, vagyis D, E és LM felezőpontja egy egyenesen van a feladat állításának megfelelően.

Megjegyzés. Miután beláttuk, hogy B, K, D és M, továbbá C, K, E és L egy körön van, befejezhetjük a bizonyítást így is: A BD-re D-ben, a BK-ra K-ban és a BM-re M-ben emelt merőleges egy ponton megy át, a k_1 kör B-vel átellenes pontján. Ez a pont azonban a háromszögbe írt kör O középpontja, mert a K-ban és az M-ben emelt merőleges ennek a körnek a sugara (*3. ábra*).

Hasonlóan a CE-re E-ben, a CK-ra K-ban és a CL-re L-ben emelt merőleges a k_2 kör C-vel szemben fekvő pontján megy keresztül, ami ismét O. Az LM húr F felezőpontjában emelt merőleges ugyancsak átmegy O-n. Mivel BD és CE párhuzamos LM-mel, így D, E és F egy egyenesen van.

III. megoldás. Feltesszük, hogy $AB < AC$. Jelöljük a CE és AB egyenes metszéspontját C'-vel, DE és LM metszéspontját F-fel, BD és MK metszéspontját G-vel (*4.ábra*). Azt kell megmutatnunk, hogy F az LM szakasz felezőpontja.

Menelaos tételét használjuk fel. A DE egyenes nem megy át a KLM háromszög egyik csúcsán sem, így az említett tétel szerint

$$\frac{ME \cdot KD \cdot LF}{EK \cdot DL \cdot FM} = -1.$$

Itt, tetszés szerint rögzítve az egyes egyeneseken egy irányítást, a szakaszok előjelesen értendők. Azt mutatjuk meg, hogy

$$\frac{ME \cdot KD}{EK \cdot DL} = -1. \tag{1}$$

DG és ML párhuzamos, így a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{KD}{DL} = \frac{KG}{GM},$$

így (1) bal oldala helyett

$$\frac{ME \cdot KG}{EK \cdot GM} \tag{2}$$

írható. GB és EC' párhuzamos, tehát az EMC' szög száraira alkalmazva a párhuzamos szelők tételét

$$\frac{ME}{GM} = \frac{MC'}{BM}.$$

A CKE és a BKG háromszög hasonló, mert megfelelő szögeik egyenlők. Miután az A-ból, a B-ből és a C-ből az ABC háromszögbe írt körhöz húzott érintők egyenlők, továbbá $MC' = LC$, mert egyenlő szakaszok különbségei, így

$$\frac{KG}{EK} = \frac{KB}{CK} = \frac{MB}{LC} = \frac{MB}{MC'}.$$

Az előjel is helyes, mert az első arányban és az utolsóban is egyirányú szakaszok szerepelnek. Mindezek alapján

$$\frac{ME\cdot KD}{EK\cdot DL}=\frac{ME\cdot KG}{EK\cdot GM}=\frac{MC'\cdot MB}{BM\cdot MC'}=-1,$$

amit állítottunk.

3. *Legyen n adott pozitív egész szám. Határozzuk meg a valós számokon értelmezett*

$$f(x)=x^{2n}+2x^{2n-1}+3x^{2n-2}+\cdots+(2n+1-k)x^k+\cdots+2nx+2n+1$$

polinom minimumát.

I. megoldás. A polinom így alakítható át:

$$\begin{gathered}\left(x^n+x^{n-1}\right)^2+2\left(x^{n-1}+x^{n-2}\right)^2+\cdots+(n-k)\left(x^{k+1}+x^k\right)^2+\cdots+n(x+1)^2+n+1=\\=(x+1)^2\left(x^{2n-2}+2x^{2n-4}+\cdots+(n-k)x^{2k}+\cdots+(n-1)x^2+n\right)+n+1.\end{gathered}$$

Az első alakban x^{2k+1} csak a kiírt tagból keletkezik, együtthatója $2(n-k)$; x^{2k} pedig a kiírt tagból és az azt követőből adódik, ha $k\geq 1$, együtthatója tehát $n-k+n+1-k=2n+1-2k$. Végül a konstans tag $n+n+1=2n+1$. Valóban az f polinomot írtuk tehát át más alakra. A második átalakítás helyessége nyilvánvaló.

A nyert alakból látható, hogy $f(-1)=n+1$, és más helyen f értéke ennél nagyobb. A keresett minimum tehát $n+1$ és ezt a -1 helyen veszi fel a polinom.

II. megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a polinom értéke a -1 helyen $n+1$, másutt ennél nagyobb. Jelöljük a polinomot f_n-nel.

$$f_1(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geq 2,$$

amiből világos, hogy $n=1$-re helyes az állítás.

Tegyük fel, hogy n-nek egy $k-1$ értékére igaz az állítás. A nyilvánvaló

$$f_k(x)=f_{k-1}(x)x^2+2kx+2k+1=(f_{k-1}(x)-k)x^2+k(x+1)^2+k+1$$

alakból azt kapjuk, hogy $f_k(-1)=k+1$, és minden más helyen a jobb oldal második tagja, továbbá a feltevés szerint az első is pozitív.

Az állítás helyessége tehát öröklődik $k-1$-ről k-ra. Így minden n-re igaz az állítás.

Megjegyzés. Végezhetjük az indukciós bizonyítást az

$$\begin{gathered}f_n(x)=f_{n-1}(x)+x^{2n}+2x^{2n-1}+2\left(x^{2n-2}+x^{2n-3}+\cdots+x+1\right)=\\=f_{n-1}(x)+1+x^{2n}-1+2\left(\left(x^{2n-1}+x^{2n-2}\right)+\left(x^{2n-3}+x^{2n-4}\right)+\cdots+(x+1)\right)=\\=f_{n-1}(x)+1+(x+1)\left((x-1)+2\right)\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1\right)=\\f_{n-1}(x)+1+(x+1)^2\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1\right)\end{gathered}$$

átalakítás alapján is.

III. megoldás. Megoldhatjuk a feladatot differenciálhányados segítségével is. Világos, hogy nemnegatív x értékekre a polinom pozitív, és x növekedtével nő. Negatív x értékekre egy más alakban írjuk a polinomot.

$$xf(x)-f(x)=x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+x-2n-1=\frac{x^{2n+2}-1}{x-1}-(2n+2).$$

Innen pedig

$$f(x)=\frac{x^{2n+2}-(2n+2)x+2n+1}{(x-1)^2}.$$

A deriváltat mint a számláló és az $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ függvény szorzatáét határozzuk meg:

$$\begin{gathered}f'(x)=\frac{(2n+2)x^{2n+1}-(2n+2)}{(x-1)^2}-\frac{2x^{2n+2}-(2n+2)x+2n+1}{(x-1)^3}=\\=\frac{2n\left(x^{2n+2}-1\right)-(2n+2)\left(x^{2n+1}-x\right)}{(x-1)^3}=\\=2(x+1)\frac{n\left(x^{2n}+x^{2n-2}+\cdots+x^2+1\right)-(n+1)x\left(x^{2n-2}+x^{2n-4}+\cdots+x^2+1\right)}{(x-1)^2}.\end{gathered}$$

Itt negatív x-re a számláló mind a két tagja és a nevező is pozitív, az $x+1$ tényező pedig a -1 helyen negatívból pozitívba megy át. A függvény tehát minimumát az $x=-1$ helyen veszi fel. A minimum értéke (pl. az f(x) utolsó alakjából számolva) n+1.

Surányi János