Forgási egyenlet – tetszőleges tengelyre[1]

Bevezetés

A merev testek forgómozgásával kapcsolatos nehezebb problémák, versenyfeladatok többségében síkbeli mozgást vizsgálunk.[2] Általában úgy járunk el, hogy a tömegközéppontra vonatkozó tételeket írjuk fel, illetve figyelembe vesszük a kényszerfeltételeket:

$$\vec{F}^{k}_{\text{eredő}} = m \cdot \vec{a}_{TK}, \; M^{k}_{TK} = \Theta_{TK} \cdot \beta, \quad + \text{kényszerfeltételi egyenletek.} \tag{1}$$

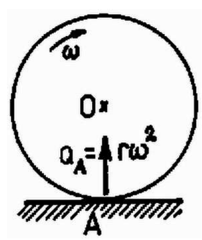
Sokszor a forgási egyenletet másfajta tengelyekre is alkalmazzák, ennek jogossága azonban egyáltalán nem magától értetődő. Ezen megoldások egységes elvi alapját keresve jutottam el a tetszőleges tengelyre érvényes forgási egyenlethez, melynek segítségével a forgástengely éppen olyan szabadon választható, mint a statikában[1]. Ebből az egyenletből az is következik, hogy nem általános érvényű az a közismert tétel, miszerint a pillanatnyi forgástengelyekre mindig felírhatjuk az

$$M = \Theta \cdot \beta \tag{2}$$

egyenletet, ahol M a külső erők forgatónyomatéka a pillanatnyi forgástengelyre[3], Θ pedig ugyanezen tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték[2,3,4,5].

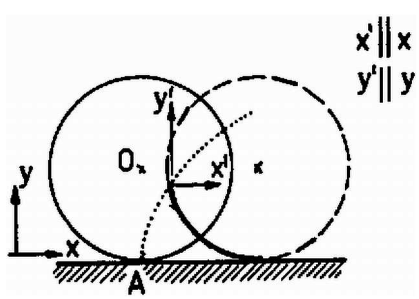
Cáfolat és a helyes tétel

A hibás (2) „tételnek" az elemzése elvezet bennünket a címbeli egyenlethez. A (2) egyenlet alkalmazhatóságát azzal szokták indokolni, hogy a pillanatnyi forgástengely körüli síkmozgás egy rövid ideig rögzített tengely körüli forgásként kezelhető. A hiba az, hogy ez a helyettesítés általános esetben csak a sebességeket adja vissza helyesen, a gyorsulásokat nem! Gondoljuk csak meg, a „test" pillanatnyi forgástengelyre eső pontja[4] általában gyorsul, a rögzített tengelyen fekvő pont pedig nyilván nem. (Onnan is látszik a (2) egyenlet „gyanús" volta, hogy egy olyan feltételre – a forgástengely pillanatnyi sebességének hiányára – hivatkozik, amely teljesülése, vagy nem teljesülése függ a megfigyelő abszolút sebességétől. Ha az egyik megfigyelő az A pontot éppen nyugvónak látja, a hozzá képest egyenesvonalú, egyenletes mozgást végző másik megfigyelő szerint ugyanezen pont nincs nyugalomban. Node Galilei óta tudjuk, hogy a mechanika törvényei a különböző inercia-rendszerekben ugyanúgy néznek ki, alakjuk megegyezik. Ez a Galilei-féle relativitás-elv.)



1. ábra

Példaként tekintsük egy r sugarú karika csúszásmentes gördülését vízszintes síkon! Ha a mozgás szögsebessége ω, az A pont gyorsulása $a_A = r \cdot \omega^2$ nagyságú, az O geometriai középpont felé irányuló vektor (*1. ábra*). Ez közvetlenül adódik, ha a tiszta gördülést két mozgás (O-val való haladó mozgás és O körüli forgás) szuperpozíciójaként állítjuk elő.[5] A rögzített tengelyű forgásra érvényes alapegyenlet bizonyítása kihasználja[6], hogy a rögzített tengelyre eső pont zérus gyorsulású. Példánkból kitetszik, hogy ez a feltétel a pillanatnyi forgástengelyre nem minden esetben teljesül.



2. ábra

[1] Az 1992. decemberi Téli Ifjúsági Fizikai Ankéton elhangzott előadás rövidített változata.

[2] A mozgás síkjára merőleges forgástengelyeket az ábrákon egy-egy ponttal fogjuk jelölni.

[3] A pillanatnyi forgástengely a test zérus sebességű pontján átmenő tengelyt jelenti. Általában érdemes a testhez rögzített, vele együtt mozgó sík egészét vizsgálni, hiszen nem biztos, hogy a zérus sebességű pont a testre esik. A továbbiakban a „testen" ezt az egész síkot értjük.

[4] A továbbiakban A-val jelölöm ezt a pontot.

[5] A merev test bármely pontjára érvényes, hogy a haladó mozgásból és forgásból adódó gyorsulások vektori összege a nyugvó rendszerbeli gyorsulást adja.

Folytassuk az elemzést úgy, hogy képzeletben beülünk egy gyorsuló koordinátarendszerbe! Valamely időpillanatban megjelöljük a test A pontját, s ha vele együtt mozgunk, rögzített forgástengelyű mozgást látunk. Ennek a forgásnak a szöggyorsulása ugyanakkora, mint az inercia-rendszerbeli szöggyorsulás, ha a koordináta-tengelyek nem fordulnak el az eredeti rendszer tengelyeihez képest (*2. ábra*). Így tehát, ha a külső (valódi, más testekkel való kölcsönhatásból származó) erők forgatónyomatékához hozzáadjuk a tehetetlenségi erők forgatónyomatékát[7], a pillanatnyi forgástengelyre vonatkozó helyes forgási egyenletet kell kapjuk.

Gondolatmenetünkben sehol nem használtuk ki, hogy A zérus sebességű, így a „test" tetszőleges P pontján átmenő tengelyre fennáll az alábbi forgási egyenlet:

$$M_P^k + M_P^{(-m\vec{a}_P)_{TK}} = \Theta_P \cdot \beta, \tag{3}$$

ahol M_p^k a külső erők forgatónyomatéka, $M_P^{(-m\vec{a}_P)_{TK}}$ a tömegközéppontban ható $(-m\vec{a}_P)_{TK}$ tehetetlenségi erőnek a forgatónyomatéka a tetszőlegesen választott tengelyre, Θ_P pedig ugyanezen tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. (Természetesen $\vec{a}_P$ a P pont gyorsulásvektora, m a test tömege, β pedig a szöggyorsulása.)

Mivel a gyorsuló koordináta-rendszerekkel való számolás szabályait nem mindenki ismeri, érdemes egy inercia-rendszerbeli bizonyításra is utalni. Induljunk ki a tömegközépponti tengelyre felírt forgási egyenletből:

$$M_{TK}^k = \Theta_{TK} \cdot \beta. \tag{4}$$

Adjunk hozzá mindkét oldalhoz $md^2\beta$-t, ahol d a tetszőlegesen választott tengely és a tömegközépponti tengely távolsága. Így

$$M_{TK}^k + md^2\beta = \Theta_P \cdot \beta \tag{5}$$

adódik, ahol felhasználtuk a Steiner-tételt[8] is. Ha most a forgatónyomatékot átszámítjuk a tetszőlegesen választott tengelyre, továbbá a tömegközéppont gyorsulását kifejezzük a P pont gyorsulásával, éppen a (3) egyenletet kapjuk.

Diszkusszió

Vizsgáljuk meg, milyen esetekben kapunk helyes eredményt, ha (3)-ban csak a külső erők forgatónyomatékával számolunk, a tehetetlenségi erők nyomatékáról pedig megfeledkezünk.

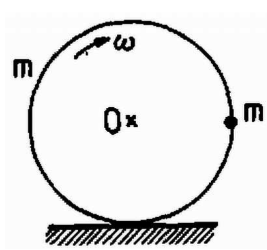
a) $P = TK$, vagyis a forgástengely átmegy a tömegközépponton. A tehetetlenségi erőknek ilyenkor nyilván nincs forgatónyomatéka P-re; megkaptuk a tömegközépponti tengelyre érvényes forgási egyenletet.

b) $\vec{a}_P = 0$; több megoldás ilyen tengelyt használ, ezért adódik helyes eredmény[9,10].

c) A tömegközéppont az $\vec{a}_P$ egyenesére esik[11,12]. Homogén henger csúszás-mentes gördülésére ez a feltétel teljesül, ezért alkalmazható a (2) tétel ezekre a problémákra.[6]

Alkalmazás

Az alábbiakban egy olyan problémát fogunk megoldani, amelyre az (1) és (2) módszer különböző eredményt ad, a (3) egyenlet célszerű alkalmazása pedig jelentősen leegyszerűsíti a szükséges számolást.



3. ábra

A probléma a következő: Egy m tömegű, r sugarú karikához egy szintén m tömegű, pontszerűnek tekinthető testet erősítünk. A rendszer vízszintes síkon csúszásmentesen gördül, s amikor a pontszerű test egy magasságban van az O geometriai középponttal, a szögsebesség adott ω nagyságú (*3. ábra*). *A kérdés:* Mekkora a rendszer szöggyorsulása?

Az (1) módszerrel a következő egyenletrendszert kapjuk (*4. és 5. ábra*):

$$F_s = 2m \cdot a_x^{TK}, \tag{6a}$$

$$2mg - F_{ny} = 2m \cdot a_y^{TK}, \tag{6b}$$

$$F_{ny} \cdot \frac{r}{2} - F_s \cdot r = \frac{3}{2} mr^2 \cdot \beta, \tag{6c}$$

$$a_x^{TK} = a_0 - \frac{r}{2}\omega^2, \tag{6d}$$

$$a_y^{TK} = \frac{r}{2} \cdot \beta, \tag{6e}$$

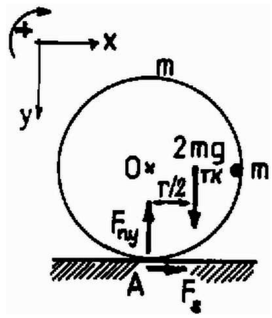
$$a_0 = r \cdot \beta. \tag{6f}$$

---

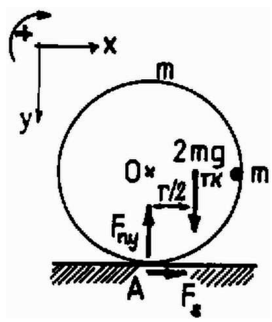
[6] Ezt az esetet tárgyalja a *Merev testek síkmozgása* című fakultációs füzet, de az ott található bizonyítás hibás[13].

Az egyenletrendszer megoldása:

(7) $$\beta = \frac{g + r\omega^2}{4r}.$$



4. ábra



5. ábra

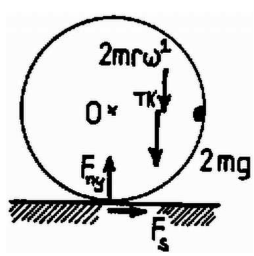
A(2) egyenletet a jelen problémára alkalmazva (*4. ábra*):

(8) $$2 \cdot mg \cdot \frac{r}{2} = 4mr^2\beta,$$

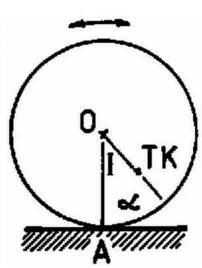
ahonnan

(9) $$\beta = \frac{g}{4r}.$$

Természetesen a meglehetősen hosszadalmas, de biztosan érvényes (1) módszerrel kapott (7) kifejezés a helyes eredmény, így a (2) "tételnek" egy ellenpéldával való cáfolatát kaptuk.



6. ábra



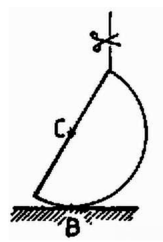
7. ábra

A (3) módszer esetén – P-t az A pontba választva – egyetlen egyenlet megadja a helyes szöggyorsulást (*6. és 1. ábra*):

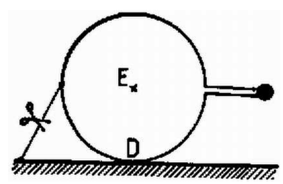
$$2mg \cdot \frac{r}{2} + 2mr\omega^2 \cdot \frac{r}{2} = 4mr^2 \cdot \beta. \tag{10}$$

Ha a P pontnak az O pontot választjuk, akkor elegendő lenne csupán a külső erők forgatónyomatékával számolnunk (lásd a diszkusszió c) pontját). Ez azonban nem túl hasznos választás, hiszen a tapadási súrlódási erőt nem ismerjük (s ennek a külső erőnek van forgatónyomatéka az O pontra).

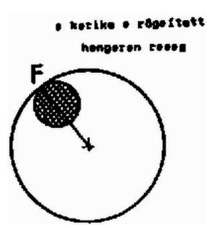
A (3) egyenlet hasznosságát egy másik példán is bemutathatjuk[7]: Egy m tömegű, inhomogén henger vízszintes síkon való csúszásmentes „rezgését” vizsgáljuk (*7. ábra*). Az ábrán látható helyzetben a szögfordulás a középhelyzethez képest α, a szögsebesség pedig ω. Vajon mekkora a henger szöggyorsulása?



8. ábra



9. ábra

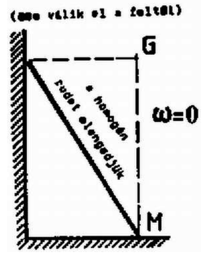


10. ábra

A megoldást most is egyetlen egyenletből kaphatjuk, ha a $P = A$ választással élünk:

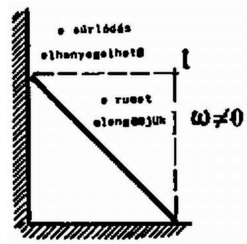
$$\Theta_A \cdot \beta = (mg + mr\omega^2) \cdot \iota \sin\alpha. \tag{11}$$

(Érdemes kiszámolni a tömegközépponti módszerrel is a szöggyorsulást.)

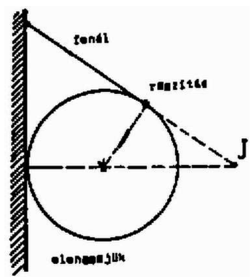


11. ábra

[7] A probléma megoldása először hibásan jelent meg[14], majd ismételten kitűzték[15]. (A feladat eredeti szövege a rezgésidőt kérdezte.)



12. ábra



13. ábra

A (11) egyenlet jól használható az 1992. évi Eötvös verseny I. feladatánál is, melynek az (1) módszerrel történő megoldása a KöMaL múlt havi számában olvasható[16]. Végül ábrák segítségével (*8-13.ábra*) bemutatunk még néhány tanulságos feladatot[8], (a problémák teljes szövege az irodalomjegyzék alapján kikereshető). Kérdésem az Olvasóhoz: a megjelölt tengelyek esetén elegendő-e csupán a külső erők forgatónyomatékával számolni? Ha igen, akkor a diszkusszióban felsorolt pontok közül melyik indokolja ezt az egyszerűsítést? [A helyes válaszok: B – igen, a b) pont miatt; C – nem; D – igen, b); E – igen, c); F – igen, c); G – igen, b); H – nem; I – igen, c); J – igen, b).] Az indoklással önállóan próbálkozzon az Olvasó! Remélem, hogy módszerem – amely a tömegközépponti tengelyre vonatkozóhoz hasonlóan univerzális érvényű – áttekinthetőbbé teszi a merev testek síkmozgásának tárgyalását, tisztáz bizonyos elvi kérdéseket, és olykor a gyakorlatban is egyszerűbbé teszi a számításokat.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Dede Miklós – Isza Sándor: *Fizika II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. 149. o.

[2] Dede Miklós: *Kisérleti fizika* (Egyetemi jegyzet). Tankönyvkiadó, Budapest, 1975. I. kötet 199. o.

[3] Nagy László: Testek gördülése, haladó és forgómzgás együttes fellépése II. *KöMaL* 37. kötet (1968) 34. o.

[4] *Fizika és számítástechnika – Mechanika.* NOVOTRADE RT., 1987. 110. o.

[5] Cseresznyés Zoltán – Benkő Zsigmond: *Fizika* 31.o.

[6] Dede Miklós – Isza Sándor: *Fizika II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. 133. o.

[7] Dede Miklós – Isza Sándor: *Fizika II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. 146. o.

[8] *Fizika és számítástechnika – Mechanika.* NOVOTRADE RT., 1987. 110. o.

[9] (Az 1982. évi Eötvös verseny 1. feladatának megoldása, (II. módszer) *KöMaL,* 66. kötet(1983) 81. o.

[10] (1561. feladat II. megoldás) *KöMaL,* 60. kötet (1980) 39. o.

[11] (1688. feladat) *KöMaL,* 63. kötet (1981) 91. o.

[12] (701. feladat) *KöMaL,* 36. kötet (1966) 138. o.

[13] Nagy László: *Merev testek síkmozgása.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984. 84–85. o.

[14] (1553. feladat) *KöMaL,* 59. kötet (1979) 183. o.

[15] (1885. feladat) *KöMaL,* 67. kötet (1983) 192. o.

[8] Ezek tanulmányozása vezette rá a Szerzőt a (3) tétel felismerésére[19].

[16] *KöMaL,* 43. évf. (1993) 177. o.

[17] (OKTV 1977. évi II/1. feladat) *KöMaL,* 55. kötet (1977) 83. o.

[18] (1061. feladat) *KöMaL,* 46. kötet (1973) 39. o.

[19] Szvetnik Endre: *Szakdolgozat,* JATE (1984.)