Relativisztikus impulzus,
relativisztikus mozgási energia

Jól ismert tény, hogy a gyorsan mozgó testek tömege a sebességük növekedtével megnő. Mérésekkel igazolható, hogy a tömeg sebességfüggésére a következő összefüggés érvényes:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ahol m_0 a test nyugalmi tömege, v a sebessége, c pedig a fénysebesség.

Könnyen beláthatjuk, hogy számottevő tömegnövekedést csak a fénysebesség közelében találhatunk, a fénynél lényegesen lassabban mozgó testekre m gyakorlatilag független v-től. Ha viszont egy részecske sebessége tart a fénysebességhez, a relativisztikus tömeg végtelenhez tart! Ez az észrevétel összefügg azzal az állítással, hogy a nullától különböző nyugalmi tömeggel rendelkező testek (korpuszkuláris részecskék) nem érhetik el a vákuumbeli fénysebességet.

Felmerülhet bennünk az a kérdés, hogy nagy sebességek esetén milyen matematikai összefüggésekből számíthatjuk ki a relativisztikus impulzust és a relativisztikus mozgási energiát. Az impulzus esetén „szerencsés” módon továbbra is használhatjuk a megszokott $p = m \cdot v$ formulát, azzal a megszorítással, hogy m helyére a fenti relativisztikus tömeget kell írni. (Az idézőjel arra utal, hogy ez igazából nem szerencse kérdése, hanem a relativisztikus tömeg definíciójának következménye: a sebességtől függő tömeget éppen az $m(v) = p/v$ összefüggés alapján értelmezzük.)

Nem ilyen egyszerű a helyzet a mozgási energia esetén, mert itt el kell búcsúznunk a megszokott $mv^2/2$ alaktól és helyette a következő formulát kell használnunk:

$$E_{\text{mozgási}} = mc^2 - m_0c^2,$$

ahol m ismét a relativisztikus tömeget, m_0 pedig a nyugalmi tömeget jelöli. Az mc^2 kifejezést teljes energiának szokták nevezni, míg az m_0c^2 neve nyugalmi energia.

A mozgási energia tehát a teljes energia és a nyugalmi energia különbsége. A nyugalmi energiát tekinthetjük egy rendszer belső energiájának abban az értelemben, hogy egy nyugvó rendszerből ennél több energiát nem vehetünk ki. Viszonylag könnyen megmutathatjuk azt is, hogy a relativisztikus mozgási energia képlete kis sebességek határesetében a megszokott klasszikus alakot veszi fel.

A továbbiakban tömören megadjuk a fenti relativisztikus kifejezések elméleti „levezetését”, illetve kapcsolatukat a fizika más törvényeivel. Az impulzus esetén – mint említettük – valójában nem levezetésről, hanem definícióról van szó, ez azonban egy szerencsés definició, mert az így értelmezett

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \vec{v}$$

vektor zárt rendszerekre (pl. ütközéseknél) szigorúan megmaradó mennyiség. Érvényes továbbá a dinamika alaptörvénye, méghozzá Newton eredeti megfogalmazásában. Eszerint a testre ható erő nem a tömeg és a gyorsulás szorzatával, hanem a tömeg és a sebesség szorzatának (az impulzusnak) időbeli változási ütemével egyenlő:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

ahol a tömeg helyére természetesen a relativisztikus tömeget kell írni.

A mozgási energia levezetéséhez a munkatételből indulunk ki. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a test sebessége és az erő azonos irányúak. Az F erő dr szakaszon végzett munkája megadja a mozgási energia megváltozását:

$$dW = d(E_{\text{mozgási}}) = F \cdot dr = \frac{d(mv)}{dt} \cdot dr = v \cdot d(mv).$$

Ezt a kifejezést a következő módon alakíthatjuk át:

$$d(E_{\text{mozgási}}) = v(v \cdot dm + m \cdot dv) = v^2 \cdot dm + mv \cdot dv) = c^2 dm \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{mv}{c^2} \cdot \frac{dv}{dm} \right).$$

A relativisztikus tömegformulát differenciálva kapjuk, hogy

$$\frac{dv}{dm} = \left(\frac{dm}{dv} \right)^{-1} = \frac{c^2 - v^2}{mv},$$

ahonnan

$$d(E_{\text{mozgási}}) = c^2 dm \cdot \left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = c^2 \cdot dm.$$

A befektetett munka tehát a tömeg növekedését okozza. Ha a test sebessége $v = 0$-tól tetszőleges v értékig nő, akkor a munka, ami egyben megadja a mozgási energia nagyságát is:

$$W = E_{\text{mozgási}} = mc^2 - m_0c^2.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a relativisztikus mozgási energiát valóban a cikk elején említett formula adja meg.

Hasznos összefüggéshez jutunk, ha a mozgási energiát a sebesség helyett a relativisztikus impulzussal fejezzük ki:

$$E_{\text{mozgási}} = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} - m_0c^2.$$

Ennek igazolását az Olvasóra bízzuk.

Az elemi részecskék leírásakor mindazon esetekben, amikor a részecske sebessége megközelíti a fénysebességet, csak a relativisztikus képleteket szabad használnunk. Ez nem csupán a mechanikai tulajdonságok, a mozgások leírására igaz, hanem például a kvantumelméleti tárgyalásnál is érvényes. Így pl. a Heisenberg-féle határozatlansági relációt is bizonyos esetekben a relativisztikus impulzus-képlettel kell felírnunk.