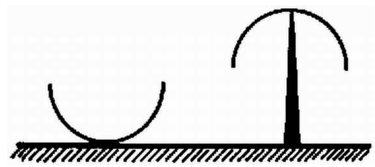
1. feladat. *Vékonyfalú, belül üres félgömböt kétféleképpen hozunk – kis kitérésű – lengésbe. Egyik esetben a domború oldalán fekszik egy vízszintes asztalon, másik esetben homorú oldalával lefelé, középen egy függőleges tű hegyére támaszkodik.*

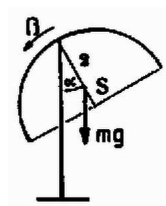


Melyik esetben lesz nagyobb a lengésidő? (A tömegközéppont mindkét esetben síkmozgást végez.)

Megoldás. Először a tű hegyére támasztott félgömb lengésidejét határozzuk meg. Ha ezt a fizikai ingát a földi nehézségi erőtérben α szöggel kilendítjük, akkor

$$M = mgs \cdot \sin\alpha$$

nagyságú forgatónyomaték igyekszik azt visszatéríteni. (Szokásosan s-sel jelöltük a tömegközéppont és a forgáspont távolságát.)



A forgástengely a tű hegyén átmenő vízszintes egyenes, *ábránkon* a papír síkjára merőleges. Erre a tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint

$$\Theta = \Theta_S + ms^2,$$

ahol Θ_S a tömegközépponton átmenő, az előbbivel párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot, m pedig az üres félgömb tömegét jelöli. A lengés során Θ_S *nem* változik meg.

A forgómozgás alapegyenlete: $M = \Theta\beta$, esetünkben (előjelre is helyesen):

$$-mgs \cdot \sin\alpha = \left(\Theta_S + ms^2\right)\beta,$$

ahonnan a kis szögekre megengedhető $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítéssel kapjuk:

$$\beta = \frac{mgs}{\Theta_S + ms^2} \cdot \alpha.$$

Teljesül tehát a harmonikus torziós rezgés $\beta = -\omega^2\alpha$ feltétele, és a rezgésidő kiszámítható:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_S + ms^2}{mgs}}.$$

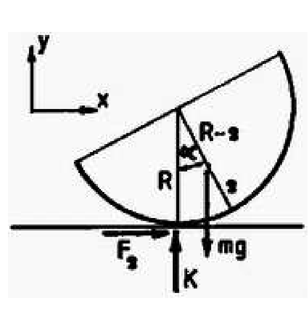
Ezek után határozzuk meg az asztalon billegő félgömb mozgásának periódusidejét! Ez az előbbinél nehezebb feladat, mivel most a testnek egyetlen pontja sem rögzített. Ilyenkor is felírhatjuk azonban a forgómozgás alapegyenletét a *tömegközépponton átmenő* tengelyre, annak ellenére, hogy a tömegközéppont mozog, sőt, gyorsul is. (A tömegközéppont gyorsulását a test szöggyorsulásával lehet majd kapcsolatba hozni.)

Lendítsük ki α szöggel a vízszintes asztalon levő üres félgömböt! A testre a következő erők hatnak:

mg a tömegközéppontban, függőlegesen lefelé;

K az asztal és a félgömb érintkezési pontjában, függőlegesen felfelé;

F_s súrlódási erő az érintkezési pontban, vízszintesen, a kimozdulással ellentétes irányban.



Most használjuk fel azt a megszorítást, hogy a kitérés kicsi. Minél kisebb a kitérés, annál inkább elhanyagolható a tömegközéppont emelkedése a vízszintes elmozduláshoz képest. A tömegközéppont vízszintes elmozdulása

$$x = -R\alpha + (R - s)\sin\alpha \approx -R\alpha + (R - s)\,\alpha = -s\alpha.$$

A tömegközéppont függőleges elmozdulása

$$y = (R - s) - (R - s)\cos\alpha = (R - s)\,(1 - \cos\alpha) \approx 0$$

(Pontosabban is fogalmazhatunk: Míg x a kicsiny α-val arányosan elsőrendűen kicsiny, addig az y emelkedés α^2-tel arányos, ún. másodrendűen kicsiny mennyiség.)

Az elmozdulásokból a sebességekre, majd a gyorsulásokra következtethetünk. A tömegközéppont gyorsulása a fentiek szerint

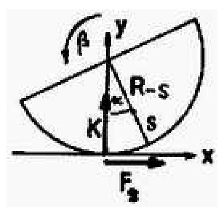
$$a_x = -s \cdot \beta,$$
$$a_y = 0.$$

Vízszintes irányban a súrlódási erő gyorsít:

$$F_s = m \cdot a_x = -ms\beta.$$

Függőlegesen K és mg egyensúlyt tartanak (hiszen $a_y = 0$):

$$K = mg.$$



Végül pedig felírhatjuk a forgómozgás alapegyenletét a tömegközépponton átmenő vízszintes tengelyre:

$$-K\,(R - s)\,\alpha + F_s \cdot s = \Theta_S \cdot \beta,$$

(az erőkarok az *ábráról* leolvasható közelítő értékek). Behelyettesítve az erőket

$$-mg(R - s)\alpha - ms^2\beta = \Theta_S\beta,$$

ahonnan β kifejezhető:

$$\beta = -\frac{mg\,(R - s)}{\Theta_S + ms^2} \cdot \alpha.$$

Ismét $\beta = -\omega^2\alpha$ alakú összefüggést kaptunk, a mozgás tehát harmonikus rezgés, és a periódusidő

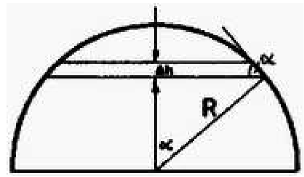
$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta_S + ms^2}{mg\,(R - s)}}.$$

A két rezgésidő aránya

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{s}{R - s}}.$$

Most már csak a tömegközéppont helyzetét, vagyis s értékét kell meghatároznunk. Ez többféle módszerrel is lehetséges. Elegáns módszer kínálkozik, ha felhasználjuk a gömbövek egyik érdekes tulajdonságát: két párhuzamos, egymástól $\Delta h \ll R$ távolságra lévő síkkal bárhogyan elmetszve egy gömbhéjat, mindig azonos felszínű gömbövet kapunk:

$$A = 2\pi R\sin\alpha \cdot \frac{\Delta h}{\sin\alpha},$$
$$A = 2\pi R \cdot \Delta h = \text{ állandó.}$$



Ha tehát a vékony félgömbhéjat gondolatban összenyomjuk a szimmetriatengelyére, akkor ott egy egyenletes tömegeloszlású pálcát kapunk, amelynek tömegközéppontja a felezőpontjában van.

Ezek szerint $s = R/2$, a rezgésidők kérdéses aránya:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{R/2}{R - R/2}} = 1.$$

A két lengésidő tehát kis kitérések esetén közelítőleg egyenlő egymással.

Megjegyzések: 1. Ha nem hanyagoljuk el a tömegközéppont emelkedését az asztalon billegő félgömb esetén, akkor erre a lengésidőre kissé nagyobb érték adódik. Így a valóságos, kísérletileg is ellenőrizhető esetben a félgömb – ha azonos szögkitérésű helyzetekből indítjuk, – valamivel lassabban billeg az asztallapon, mint a tű csúcsán.

2. Az $s = R/2$ összefüggés is csak közelítőleg igaz, mivel a gömbhéj vastagsága nem zérus, – csak éppen elhanyagoltuk. (A jó fizikus a lényeg megragadásának és a probléma szempontjából lényegtelen dolgok elhanyagolásának művésze.)

2. feladat. *Körülbelül* 1 cm ^{2} *keresztmetszetű,* 80 cm *hosszú, felül nyitott üvegcsövet színültig megtöltünk higannyal. A cső felső végére ráhúzzuk és befőttesgumival a csőhöz szorítjuk egy teljesen összelappadt (levegőt nem tartalmazó) lufi száját. Ezután a csövet a levegőben tartva felfordítjuk.*

Mi fog történni? (Készítsen rajzot is!)

Megoldás. Feltételezhetjük, hogy amikor ráhúzzuk az összelappadt lufit az üvegcső szájára, a higany feletti részben nem lesz levegő, és később sem tud bejutni levegő a lufi belsejébe.

Fordítsuk meg a csövet!

Függőleges helyzetben a cső – most már alul levő – szájánál a lufihártyára belülről 80 cm magas higanyoszlop nyomása, kívülről pedig a külső levegő nyomása hat. (Vegyük ez utóbbit 76 Hgcm-nek.)

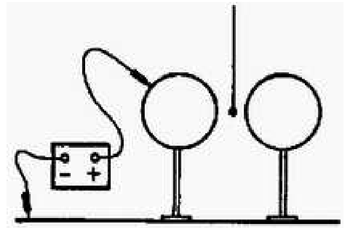
A belső, nagyobb nyomás kissé szétnyitja az összelappadt lufit, s a higany elindul lefelé. $80 - 76 = 4$ cm^3 higany lefut egészen a lufi aljára, és ekkor a folyamat leáll. A csőben marad 76 cm magas higanyoszlop, fölötte vákuum (a higanygőz nyomása elhanyagolható). Alul, a cső szájától kezdve a lufi újra összelappadt állapotban van, mert a külső légnyomás összenyomja. Legalul, az összelappadt lufiban lévő 4 cm^3 higany kicsi, kidudorodó zacskóban gyűlik össze.

A folyamat legfontosabb pillanatait az alábbi *ábrasorozat* szemlélteti („oldalnézetben"):

Ha túl gyorsan fordítjuk meg a csövet, esetleg a végén még meg is lökjük kissé, 4 cm^3-nél több higany is le tud folyni a lufi aljára. Ekkor a végállapotban a külső légnyomás kissé visszanyomná a lufit a cső szájánál a cső belseje felé. Ugyanakkor a lufit a higany lefelé húzza, kissé megnyújtja a gumit, s ez a hatás a cső szájánál is érvényesül. Mindezek azonban olyan kicsiny nyomáskülönbséget és többleterőt eredményeznek, hogy a lufinak ebből származó alakváltozása szabad szemmel alig vehető észre, s a megoldást lényegesen nem módosítja.

3. feladat. *Két egyforma szigetelő-tartón két egyforma fémgömb nyugszik egymás közelében. Töltés egyiken sincs. Egy néhány száz voltos telep egyik sarkát leföldeljük, a másik sarokhoz csatlakozó vezeték végével pedig megérintjük először az egyik (mondjuk a bal oldali), azután a másik (jobb oldali) gömböt, majd a telepet eltávolítjuk. Ezután felülről, szigetelő fonálon, kicsiny, töltetlen golyócskát engedünk le a két gömb közé, lehetőleg pontosan középre.*

Mit tapasztalunk?



Megoldás. Első tekintetre úgy tűnik, hogy semmi különbség nincs a két gömb feltöltése között. Mindkét gömb töltetlen, azonos sugarú, s a földtől is ugyanakkora távolságra vannak. A megoldás kulcsa mégis az, hogy észrevegyük: más-más „környezetben” történik a feltöltés. Amikor az első gömböt töltjük fel, egy töltetlen gömb áll közben mellette. Amikor a másodikat töltjük, amellett már egy töltött gömb áll!

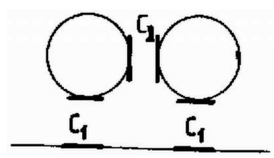
Jelöljük Q_1-gyel azt a töltést, amelyet egy magános gömb venne fel a telepből.

Az első gömb feltöltésekor Q_1-nél nagyobb, mondjuk $Q_1 + Q_2$ töltés áramlik erre a gömbre, mert a mellette álló töltetlen gömbön elektromos megosztás történik, s ez leköt a gömbön Q_2 töltést.

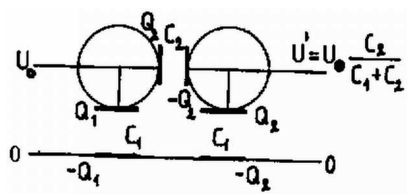
A második gömbre Q_1-nél kisebb, mondjuk $Q_1 - Q_3$ töltés vihető fel ugyanarról a telepről, mert emellett már egy ugyanilyen előjelű töltéssel feltöltött gömb áll.

Könnyebben áttekinthető és kvantitatívan is tárgyalható a probléma, ha bevezetjük a gömböknek mind a földhöz, mind egymáshoz képesti kapacitásait.

Jelöljük C_1-gyel egy gömb és a föld közötti, C_2-vel pedig a két gömb közötti kapacitást (ld. *1. ábra*).

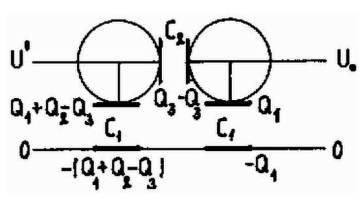


1. ábra



2. ábra

Az első (mondjuk a bal oldali) gömböt megérintve az U_0 feszültségű telep pozitív sarkához csatlakozó vezeték végével, a *2. ábrán* látható elektromos állapot fog kialakulni. (A feltüntetett – fiktív – vezetékek megkönnyítik a kapcsolás felismerését.)



3. ábra

Mindkét gömb ekvipotenciális, de a jobb oldali gömb potenciálja kisebb. Ez ugyanis

$$U^{'} = \frac{Q_2}{C_1},$$

míg a bal oldali gömbre:

$$U_0 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_2}{C_1}.$$

Innen az alábbi összefüggések adódnak:

$$Q_2 = Q_1 \frac{C_2}{C_1 + C_2}, \quad \text{illetve} \quad U' = U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

A bal oldali gömbre összesen

$$Q_1 + Q_2 = Q_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

nagyságú töltés kerül.

Ezek után érintjük hozzá a telep pozitív sarkáról jövő vezeték végét a jobb oldali gömbhöz. Ennek potenciálja U_0 lesz, felmegy rá $Q_1 - Q_3$ töltés; Q_1 a föld felé, $-\,Q_3$ a másik gömb felé, s így a *3. ábrán* látható elektromos állapot alakul ki.

Most is felírható az U_0 feszültség kétféle módon:

$$U_0 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{-Q_3}{C_2} + \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{C_1}.$$

Innen pedig a következő összefüggésekhez jutunk:

$$Q_3 = Q_1 \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^2, \text{ illetve } U'' = U_0 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2}\right),$$

mivel $U'' = \dfrac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{C_1}$. A jobb oldali gömb töltése végül:

$$Q_1 - Q_3 = Q_1 \left[1 - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^2\right].$$

A két gömb töltéseinek aránya:

$$\frac{Q_1 - Q_3}{Q_1 + Q_2} = 1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} < 1.$$

Ha felülről, szigetelő fonálon, kicsiny, töltetlen golyócskát engedünk le a két gömb közé, lehetőleg pontosan középre, akkor ez a golyócska az ottani térerősség hatására dipóllá válik (akár szigetelő, akár vezető, csak a mechanizmus más), és a nagyobb töltésű gömb maga felé húzza.

A golyócska kilendül, balra.

Megjegyzés. $U'' > U_0$, vagyis a bal oldali gömb földhöz képesti feszültsége nagyobb lesz, mint a telepé! Ha pl. $\dfrac{C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{1}{10}$ és $U_0 = 3000$ V, akkor $U' = 300$ V, $U'' = 3270$ V. A bal oldali gömb töltése $1{,}10 \cdot Q_1$, a jobb oldalié $0{,}99 \cdot Q_1$ lesz az adott esetben.

A verseny végeredménye

A Versenybizottság a beérkezett 246 dolgozat körültekintő átvizsgálása és értékelése alapján egyhangúlag megállapította, hogy Katz Sándor dolgozata kiemelkedik a mezőnyből. Egyedül ő oldotta meg hibátlanul mindhárom feladatot, az első példára adott energetikai megoldása különösen értékes. Ezért

I. díjat kapott **KATZ SÁNDOR,** a bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium IV. osztályos tanulója, JURISITS JÓZSEF és ERDÉLYESI JÁNOS tanítványa. Pénzjutalma 8 000 Ft.

A II. díjat a Versenybizottság nem adta ki.

III. díjat kapott és a verseny 2-10. helyezettje lett egyenlő helyezésben a következő kilenc versenyző:

DORNBACH PÉTER, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumának IV. oszt. tanulója, FLÓRIK GYÖRGY tanítványa;

GEFFERTH ANDRÁS, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium IV. oszt. tanulója, HORVÁTH GÁBOR tanítványa;

MORVAI PÉTER, a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium III. oszt. tanulója, HORVÁTH GÁBOR tanítványa;

MAULIS ÁDÁM, az ELTE I. éves matematika-fizika tanárszakos hallgatója, aki a budapesti Széchenyi István Gimnáziumban érettségizett, mint DRASKÓCZY PÁL és INGES JÁNOS tanítványa;

PAPP ZSOMBOR, a zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium IV. oszt. tanulója, VADVÁRI TIBOR tanítványa;

PÁLFALVI LÁSZLÓ, a pécsi Apáczai Csere János Gimnázium III. oszt. tanulója, KECZER ZOLTÁN tanítványa;

SOMOGYVÁRI ZOLTÁN, az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium IV. oszt. tanulója, TOMCSÁNYI PÉTER tanítványa;

TÓTH GÁBOR, az Újpesti Műszaki Középiskola 5. oszt. tanulója, valamint

VEISZ LÁSZLÓ, az ELTE I. éves fizikus hallgatója, aki a budapesti Budai Nagy Antal Gimnáziumban érettségizett, mint TÓTH CSABA tanítványa.

A III. díjat kapott versenyzők pénzjutalma egyenként 2000 Ft.

Dicséretet és egyenként 1000 Ft pénzjutalmat kapott az alábbi négy versenyző:

PAFKA SZILÁRD, az ELTE I. éves fizikus hallgatója, aki Romániában, a borosjenői gimnáziumban (Líceum Teoretic, Ineu) érettségizett, mint OTMAR HUHN tanítványa;

PROHÁSZKA ZOLTÁN, a budapesti Veres Pálné Gimnázium III. oszt. tanulója, OPORNÉ FODOR MÁRIA tanítványa;

SZÉKELY SÁNDOR, a kecskeméti Katona József Gimnázium IV. oszt. tanulója, NÉMETH ÁGNES tanítványa, és

VERES GÁBOR, a balassagyarmati Balassi Bálint Gimnázium IV. oszt. tanulója, BOGNÁR MIHALYNÉ és FŰRÉSZ ISTVÁN tanítványa.

A Versenybizottság további sorrendet nem állapított meg, és ezúton is gratulál a verseny nyerteseinek.