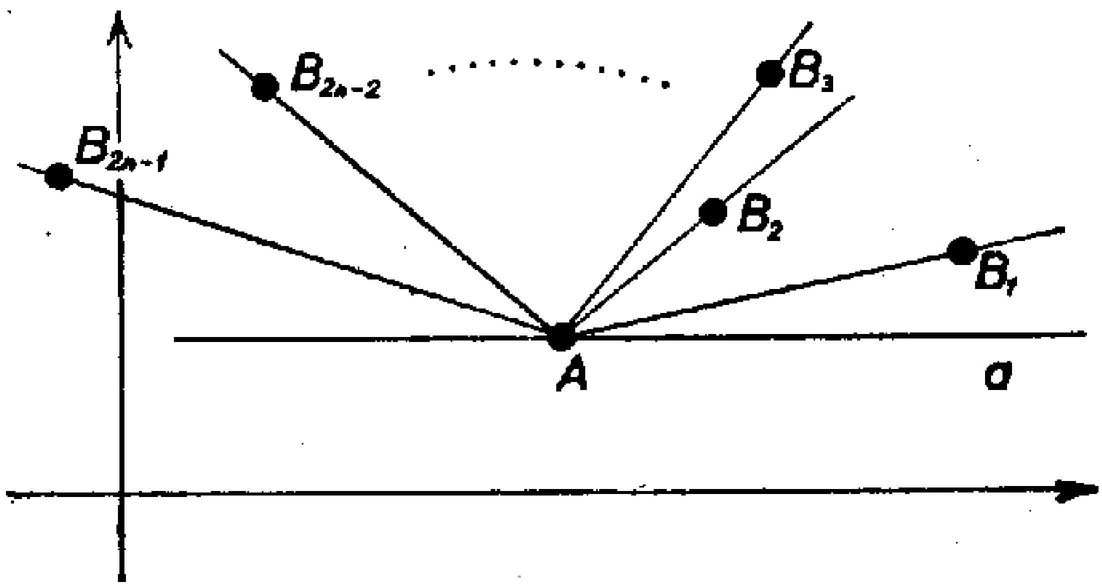
A feladatnál kissé általánosabban azt mutatjuk meg, hogy n piros és n kék pont esetén is létezik a kívánt összekötő rendszer, ahol $n \geq 1$ tetszőleges egész szám.

I. megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Ha $n = 1$, az állítás triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy az állítást valamilyen n-ig már minden számra beláttuk. Megmutatjuk, hogy ebből az $(n + 1)$-re is következik.

Tekintsük az összes olyan szakaszt, amelyek egyik végpontja piros, a másik kék pont. Azt fogjuk megmutatni, hogy ezek között van olyan, mondjuk AB, hogy az AB egyenes úgy vágja ketté a pontjainkat, hogy a piros és kék pontok száma a keletkező részeken belül is egyenlő. Az indukciós feltevésünk szerint e részeken belül már összeköthetőek a pontok a kívánt módon. Mivel a kapott szakaszoknak nincs közös pontjuk az AB szakasszal, azokat az AB szakasszal kiegészítve az egész pontrendszernek egy megfelelő összekötését kapjuk.

Vegyünk fel egy tetszőleges koordináta–rendszert, és válasszuk ki a pontjaink közül a legkisebb ordinátájút, legyen ez A. (Ha a legkisebb ordinátához több pont is tartozna, A legyen közülük a legkisebb abcisszájú.) Legyen mondjuk ez az A pont piros. Jelöljük a-val az A-n átmenő, x tengellyel párhuzamos egyenest, és tekintsük az A-ból a többi pont felé futó félegyeneseket. Ezek mind a-n vagy a fölött vannak, és mindegyikük pontosan egy A-tól különböző pontot tartalmaz, hiszen feltevésünk szerint pontjaink közt nincs három egy egyenesen. Vegyük a-nak az x tengely pozitív irányába mutató felét, és forgassuk ezt a félegyenest A körül pozitív irányba. Jelöljük a pontrendszer pontjait abban a sorrendben, ahogy találkozunk velük B_1-gyel, B_2-vel, …, B_{2n-1}-gyel (1. ábra).



1. ábra

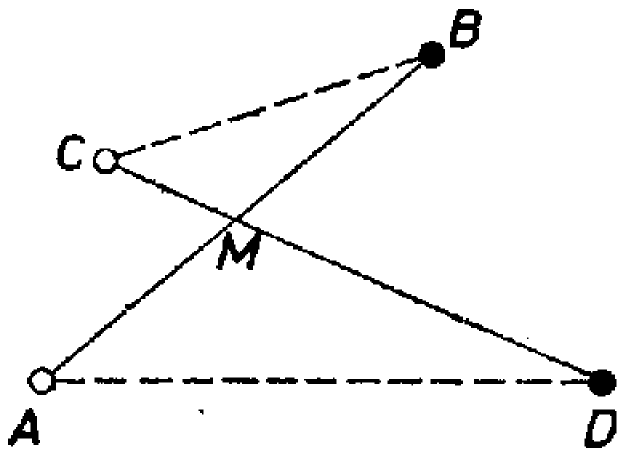
Ha B_1 vagy B_{2n-1} kék, a keresett AB szakasz szerepére választhatjuk az AB_1, illetve AB_{2n-1} szakaszt.

Ha B_1 és B_{2n-1} is piros, tekintsük a B_1AB_2, B_1AB_3, …, B_1AB_{2n-1} szögtartományokat határaikkal együtt, és nézzük meg, hogy mennyi az általuk tartalmazott piros és kék pontok számának (előjeles) különbsége. A tartományok közül az elsőben, a B_1AB_2 tartományban ez a különbség 1 vagy 3, tehát pozitív, az utolsóban, B_1AB_{2n-1}-ben nulla, emiatt az utolsó előttiben -1. Mivel az egymás után következő tartományok között a különbség mindig 1-gyel változik, kell lennie egy olyan tartománynak, ahol a különbség 0, legyen B_1AB_k az első ilyen tartomány $(1 < k < 2n - 1)$. Ekkor B_k csak kék lehet, hiszen B_1AB_{k-1}-ben a piros és kék pontok számának a különbsége még pozitív. Most tehát AB_k választható a keresett AB szakasznak, a bizonyítást ezzel befejeztük.

Megjegyzés. A fenti alapgondolat teljes indukció nélkül is megfogalmazható, a ponthalmaz ismételt (legfeljebb $(n-1)$-szeri felosztásával. Magában az alkalmazott indukcióban nem lett volna elég a szokásos „ha n-re igaz, $(n+1)$-re is igaz" típusú meggondolás, hiszen a kettévágásnál n-nél kevesebb pontot is kaphatunk.

II. megoldás. Képzeljük el az összes összekötő rendszert, amelyek egy–egy kék és piros pontot kapcsolnak össze. Ezek száma $2n$ pont esetén $n!$, tehát *véges* érték. Ezek között nyilvánvalóan van egy, vagy több olyan rendszer, ahol az összes résztvevő szakaszok hosszúságainak összege minimális.

Tegyük fel most, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz. Ekkor kiválasztva a minimális összegű összekötést (vagy egyet a minimálisak közül), abban biztosan van legalább két metsző szakasz. Legyenek ezek AB és CD – ahol A és C pont kék, B és D pedig piros (2. ábra).



2. ábra

Módosítsuk úgy a rendszert, hogy a szaggatott vonal szerint A-t D-vel, B-t C-vel kötjük össze. Ha a metszéspont M, a háromszög–egyenlőtlenség miatt igaz a következő:

$$AM + MD > AD,$$
$$CM + MB > CB.$$

E kettőt összegezve:

$$AM + MB + CM + MD = AB + CD > AD + CB.$$

Vagyis a rendszer nem volt minimális, hiszen annál kisebbet találtunk. Ellentmondásra jutottunk, ezzel igazoltuk az állítást.