$$x_1^{p_1}+x_2^{p_2}+\ldots+x_k^{p_k}=y^q \tag{1}$$

Feladatunk az 1975. évi Arany Dániel Verseny egyik feladatának az általánosítása, ez nálunk az 1596. számú gyakorlat volt. A speciális eset megoldása két lépésből állt (megtalálható e szám 72. oldalán): először beláttuk, hogy egyáltalán van megoldás, majd megmutattuk, hogy ha egy gyök van, abból kiindulva végtelen sok is megadható. Az utóbbi igazolása esetünkben majdnem szó szerint megismételhető: ha (1) -nek x_1, x_2, $\ldots$, y gyöke, és s a p_1, p_2, $\ldots$, p_k, q számok közös többszöröse, akkor (1)-et tetszőleges a természetes szám s-edik hatványával szorozva kapjuk, hogy

$$\left(x_1a^{\frac{s}{p_1}}\right)^{p_1}+\ldots+\left(x_ka^{\frac{s}{p_k}}\right)^{p_k}=\left(ya^{\frac{s}{q}}\right)^{q}.$$

Mivel itt a zárójeleken belül természetes számok állnak, valóban újabb megoldást kaptunk, és mivel a tetszőleges volt, az így nyert megoldások száma valóban végtelen.

Elég tehát (1)-nek egyetlen megoldását megtalálni. A speciális esetben azt használtuk fel, hogy két egyenlő kitevőjű 2–hatvány összege is 2–hatvány. Mivel most k db hatvány összegének kellene egy újabb hatvánnyal egyenlőnek lennie, természetes ötletnek látszik a megoldást a k szám hatványai között keresni. A k^s hatvány egyben p_1-edik, p_2-edik, $\ldots$, p_k-adik hatvány is, ha s a p_1, p_2, $\ldots$, p_k számok többszöröse, és mivel k^s-t k-szor összegezve k^{s+1}-et kapunk, elég azt biztosítani, hogy $(s+1)$ osztható legyen q-val.

Jelöljük a p_1, p_2, $\ldots$, p_k számok legkisebb közös többszörösét p-vel, feltevésünk szerint a p, q számoknak nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk. Osszuk el a

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots,\ (q-1)p$$

számokat q-val, és jelöljük a kapott maradékokat r_1-gyel, r_2-vel, r_{q-1}-gyel. Ezek mind különbözőek, hiszen ha $r_i=r_j$ volna, $ip-jp$ osztható volna q-val. Mivel p és q relatív prímek, egyik maradék sem lehet 0, valamelyik közülük tehát $(q-1)$-gyel egyenlő. Van tehát p-nek olyan többszöröse, amelyik q-val osztva $(q-1)$ maradékot ad, ha tehát ezt a többszöröst választjuk s-nek, az

$$x_i=k^{\frac{s}{p_i}},\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,k),\qquad y=k^{\frac{s+1}{q}}$$

számok természetes számok, és (1) egy gyökrendszerét adják. A feladat állítását ezzel bizonyítottuk.

Baksai Róbert (Győr, Révai M, Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nem vezetne célra, ha most is 2–hatványokat akarnánk használni. Annyi azonban látható ezen az úton, hogy a feladat feltétele nem szükséges ahhoz, hogy (1)-nek végtelen sok megoldása legyen. Mint láttuk, ehhez elegendő, hogy (1)-nek egyáltalán legyen megoldása. Mivel pedig $2^4+2^4+2^5=2^6$, (1)-nek akkor is lehet megoldása, ha a p_i-k nem mind relatív prímek q-hoz.