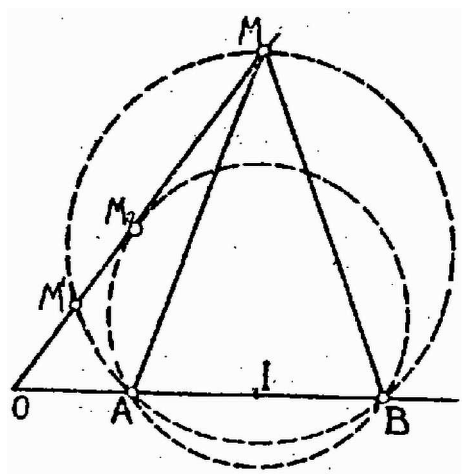
Hajós György (1912-1972). A budapesti kegyesrendi (ismertebb nevén piarista) gimnáziumban érettségizett. Matematikai tehetsége már ifjúkorában megnyilvánult. Már IV. gimnazista (ma 8. általános) korában a lap több megoldását közölte. VI. gimnazista, amikor megoldja az Eötvös-verseny feladatait. Az 1926–27-es tanévben 14 alkalommal szerepelt megoldás az ő aláírásával. Ezek közül válogattunk ki egyet.

82. *XOY szög OX szárán adva van két pont A és B úgy, hogy $OA = a$, $OB = b$. Határozzuk meg OY száron azon M pontot, melyből AB távolság adott m szög alatt látható. $OM = x$! Mikor oldható meg a feladat? Mi az m szög maximuma? Ezen maximumnak megfelelő M pont helye megszerkesztendő!*

Megoldás.



Legyen $XOY\sphericalangle = \alpha$, $AM = y$, $BM = z$. $ABM\triangle$-re alkalmazzuk a cosinus tételt:

$$y^2 + z^2 - 2yz\cos m = \overline{AB^2} = (b-a)^2 \tag{1}$$

$$\text{Az} \quad AOM\triangle-\text{ben}: \quad y^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha \tag{2}$$

$$BOM\triangle-\text{ben}: \quad z^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos\alpha \tag{3}$$

Az $ABM\triangle$ területe: $\dfrac{yz\sin m}{2}$; kifejezhető, mint a $BOM\triangle$ és $AOM\triangle$ területének különbsége is, tehát

$$\frac{yz\sin m}{2} = \frac{bx\sin\alpha}{2} - \frac{ax\sin\alpha}{2}$$

$$yz = \frac{(b-a)x\sin\alpha}{\sin m} \tag{4}$$

(2), (3) és (4) értelmében a helyettesítéseket (1)-ben elvégezve és rendezve;
lesz:

$$x^2 - \big[(a+b)\cos\alpha + (b-a)\mathrm{cotg}\; m\sin\alpha\big]x + ab = 0. \tag{5}$$

Amint látjuk, ha van megoldás, általában kettő van. Ugyanis M pont oly körön tartozik feküdni, melynek AB húrjához m kerületi szög tartozik; ez a kör két pontban metszi OY-t, ha az (5) discriminansa > 0.

Az (5) egyenlet két gyökének szorzata: $x_1x_2 = ab$; ezen összefüggés azon ismert geometriai tételt jelenti, amely szerint az O pontból a kérdéses körhöz húzott szelők szeleteinek szorzata egyenlő:

$$OM \cdot OM' = OA \cdot OB.$$

Egy megoldás van – a szóban forgó kör egy pontban érinti az OY egyenest – ha az (5) discriminansa $= 0$. Ebben az esetben $x_1 = x_2$, tehát $x^2 = ab$, azaz OM az OA és OB távolságok mértani középarányosa. Könnyen látható geometriailag is, hogy ebben az esetben előálló m szög a maximum; az egyenes minden más pontját A-val és B-vel összekötve, az érintő körre nézve külső excentrikus szöget kapunk, mely az AB-hez tartozó kerületi szögnél mindig kisebb! [1])

Az (5) egyenletnek discriminansa:

$$D \equiv \left[(a+b)\cos a + (b-a)\text{cotg } m \sin\alpha\right]^2 - 4ab \geq 0,^2$$

ha

$$\text{cotg } m \geq \frac{2\sqrt{ab}-(a+b)\cos\alpha}{(b-a)\sin\alpha} \tag{6}$$

azaz

$$m \leq \text{arc cotg}\frac{2\sqrt{ab}-(a+b)\cos\alpha}{(b-a)\sin\alpha} \tag{6a}$$

Ezen összefüggés világosan mutatja az m maximumát, ill. ennek kiszámítását (az egyenlőségi jellel) !

Hajós György (Kegyesrendi fg. V. o. Bp.).

Másodéves egyetemista, amikor Minkowszki egy tételének legegyszerűbb bizonyítását adja. A tétel a következő: a sík azon pontjainak összességét, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám, rácsnak nevezzük, maguk a pontok a rácspontok. Ha síkban megrajzolunk valamely az origóra nézve szimmetrikus konvex idomot (sokszöget, vagy görbét), melynek területe nagyobb 4-nél, ez legalább egy rácspontot tartalmaz az origón kívül. Legnagyobb eredménye is Minkowski egy olyan sejtésének bizonyítása volt, amellyel kiváló matematikusok sora már 50 éve próbálkozott. Későbbi tudományos munkái felölelték a geometria különböző ágait, absztrakt algebrát, gráfelméletet, determinánselméletet, számítástechnikát, matematikai statisztikát.

A középiskolai versenyekkel, az ifjúsággal, tanárokkal való kapcsolatát élete végéig fenntartotta. A Kürschák József matematikai tanulóverseny bizottságának elnökeként ő ismertette az eredményeket és feladatmegoldásokat. Kiváló előadó volt. Sokan emlékeznek gondosan kicsiszolt megoldásaira, egy-egy szép ötlet elmondásakor az arcán megjelenő hamiskás mosolyra. A feladatokhoz fűzött megjegyzései a matematika számos kérdéskörére irányították rá a figyelmet.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem geometria tanszékének vezetője volt. Matematikusok nemzedékét tanította. Előadásaira nemcsak matematikus hallgatók jártak be, de egyéb szakosok is élvezték kiváló előadói stílusát, szellemes logikáját.

Eredményei elismeréséért Kossuth díjban részesült.

---

[1] T. i. a szög szárai által kimetszett ívek *különbségének* a fele!

[2] Ha ezen kitétel ki van elégítve, a gyökök valósak és mivel (5)-ben két jelváltás van mind a kettő pozitív!