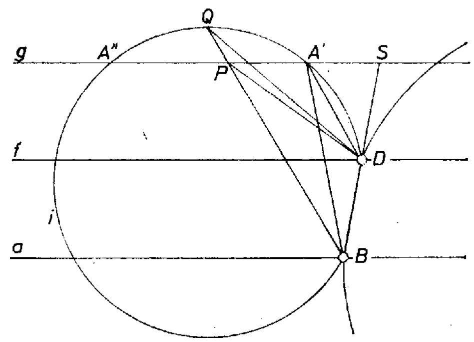
Felvéve a $BC = a$ oldalegyenest, nyilvánvaló, hogy az A csúcs az ezzel párhuzamos, tőle m_a távolságban haladó g egyenesen lesz, az AC oldal D felezőpontja pedig, amelyre $BD = s_b$, az a és g között, tőlük egyenlő távolságban haladó f egyenesen. Ma még az f-en tetszőlegesen megválasztott D körüli s_b sugarú körívvel kimetsszük a-ból B helyzetét, hosszúságadatainkat felhasználtuk.

A BAC szög egyszersmind a DAB háromszögnek is szöge, pontosabban a DB szakasznak A-ból, a g egyenes valamely pontjából vett látószöge. Tekintsük ezért DB-nek a g-t metsző látóköríveit különböző látószögek mellett, legyenek egy ilyen ív i és g-vel közös pontjai A', A''. Az A'-ből és A''-ből vett látószögek nem lehetnek maximálisak (ezek egyenlők, mert ugyanazon a partján vannak a BD egyenesnek), hiszen az A' A'' húr egy tetszőleges P pontjára – a BP egyenes és az A' A'' ív közös pontját Q-val jelölve – a külső szög tétele alapján (1. ábra)

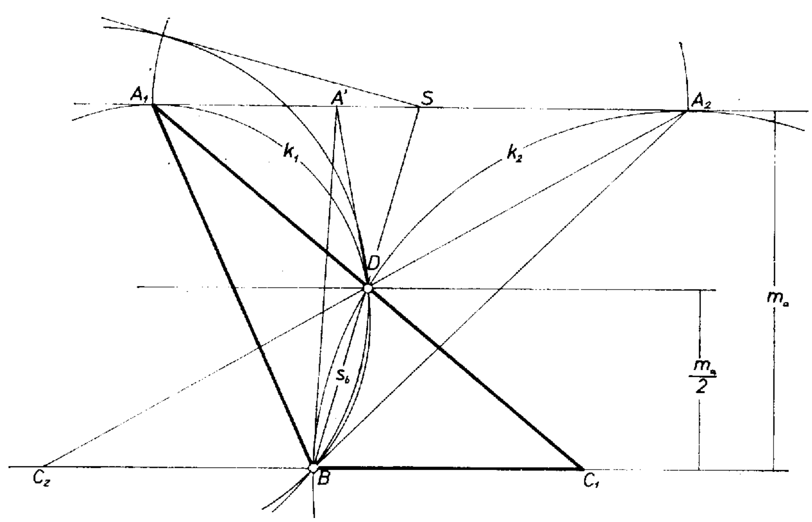
$$BPD\sphericalangle = BQD\sphericalangle + PDQ\sphericalangle > BQD\sphericalangle = BA'D\sphericalangle.$$



1. ábra

Eszerint a látószög csak a B-n és D-n átmenő, g-t érintő körök A_1, ill. A_2 érintési pontjaiban lehet maximális.

Ilyen kör a BD egyenes mindkét partján várható, megszerkesztésükhöz mindjárt felhasználhatjuk az előbbi i-t tartalmazó k kört. Legyen ugyanis a BD és g egyenesek metszéspontja S, így ismert tétel szerint $SA_j^2 = SD \cdot SB$ $(j = 1, 2)$, azaz SA_j az SB, SD szakaszok mértani középarányosa, és ugyanezen feltétel szerint SA_j hosszát megadja bármely, a B, D pontokon átmenő körhöz S-ből szerkesztett érintőszakasz hossza. Eszerint megszerkesztve, az S-ből a k-hoz húzott érintők egyikét – érintési pontja legyen T –, az S körüli, T-n átmenő kör kimetszi g-ből A_1-et és A_2-t. Ezekből a háromszög hátralevő csúcsának C_1, C_2 helyzetét a D-re való tükrözéssel kapjuk.



2. ábra

Az előzőek azt bizonyítják, hogy a g-n haladó pontból a BD szakasz látószögének A_1-ben vagy A_2-ben van maximuma. Ugyanis $SA' \cdot SA'' = SA_2^2$ miatt valamelyik érintési pont az A' A'' között van és játszhatja P szerepét. Az viszont, hogy a BA_1D és BA_2D szögek közül melyik a nagyobb – hiszen nyilván ezt keressük –, külön kell eldöntenünk. Nyilvánvalóan egyenlő e két szög, ha BD merőlegesen áll g-re $\left(\text{azaz ha } s_b = \dfrac{m_a}{2}\right)$, de így BD szimmetriatengellyé válik és a két megoldás úgysem számít különbözőnek. Máskülönben válasszuk úgy az indexeket, hogy $A_1SD\sphericalangle < A_2SD\sphericalangle$ legyen, megmutatjuk, hogy így $BA_1D\sphericalangle > BA_2D\sphericalangle$. Valóban, A_2-nek a BD tengelyre való A_2' tükörképe g-nek D-t nem tartalmazó partján van, így az A_2', B, D pontokkal meghatározott kör két pontban metszi g-t (a BD-vel párhuzamos

A_1A_2' egyenes két partján), így a $BA_2'D\sphericalangle = BA_2D\sphericalangle$ nem lehet maximális, hiszen A_1 rajta van azon a húron, amit g e körből kimetsz.

Nyilvánvaló az eddigiekből, hogy feladatunkból a legnagyobb BAC szögre vonatkozó rész megoldhatóságának egyetlen feltétele $s_b \geq \frac{m_a}{2}$, és ekkor a megoldás egyértelmű.

A legkisebb BAC szögre vonatkozó részre válaszunk: ilyen háromszög nincs, hiszen amíg $A \not\equiv S$, addig A helyére (amennyiben A a fenti SA_1 szakaszon van) az AS szakasz egy belső A' pontját véve, $BA'D\sphericalangle < BAD\sphericalangle$; ha viszont A azonos S-sel, akkor a háromszög elfajul egyenesszakasszá, az m_a magasság értelmét veszti.

Megjegyzés. Az SA_i mértani közép természetesen máshogyan is szerkeszthető, többek között a nyilvánvaló

$$SA_i = SD \cdot \sqrt{2} = \frac{SB}{\sqrt{2}}$$

összefüggésből is.