

1. Amennyiben a két adott pont a háromszög

a) alapjának két végpontja, úgy a harmadik csúcs az adott szakasz felező merőlegesén van, kivéve a szakasz felező-pontját, így

$$C \in \{(x; y) | 3x + 2y = 2\} \setminus \{(-2; 4)\};$$

b) egyik szárának két végpontja, akkor az egyiküktől a másik távolságában lévő pontok és csak ezek jöhetnek szóba, tehát

$$C \in \{(x; y) | (x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 52\} \setminus \{(-5; 2), (7; 10)\}$$

vagy

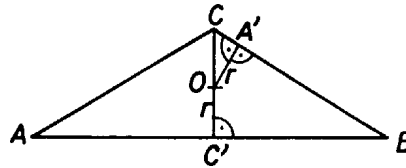
$$C \in \{(x; y) | (x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 52\} \setminus \{(1; 6), (-11; -2)\}.$$

2. Az a , aq , aq^2 természetes számok. $aq^2 = a + 6$, $q^2 = 1 + \frac{6}{a}$, $q = \sqrt{1 + \frac{6}{a}}$. Az $aq = \sqrt{a^2 + 6a}$ természetes számra

$$a < \sqrt{a^2 + 6a} < a + 3, \quad \text{így} \quad a^2 + 6a = \begin{cases} (a + 1)^2 & \text{vagy} \\ (a + 2)^2. \end{cases}$$

Az egyetlen pozitív egész megoldás $a = 2$, így $q = \sqrt{1 + \frac{6}{2}} = 2$, tehát az első három elem összege 14.

3. Mivel CO felezi a szárak 120° -os szögét, azért $OCA' \sphericalangle = 60^\circ$, továbbá $OA'C \sphericalangle = 90^\circ$, így az OCA' háromszögben $OA' = r$ miatt $CA' = \frac{r}{\sqrt{3}}$ és $CO = 2CA' = 2\frac{r}{\sqrt{3}}$.



A $CC'B$ háromszög szögei szintén 60° , 90° illetve 30° nagyságúak, ezért

$$C'B = \sqrt{3}CC' = \sqrt{3} \left(r + 2\frac{r}{\sqrt{3}} \right).$$

A háromszög oldalai így:

$$AB = 2C'B = 2\sqrt{3} \left(r + 2\frac{r}{\sqrt{3}} \right) = (2\sqrt{3} + 4)r$$

és

$$AC = BC = 2CC' = 2 \left(r + 2\frac{r}{\sqrt{3}} \right) = \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) r;$$

a kerülete és területe az előzőek szerint

$$k = AB + BC + CA = AB + 2BC = (2\sqrt{3} + 4)r + 2 \left(2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) r = \left(2\sqrt{3} + 8 + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) r;$$

és

$$t = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CC' = C'B \cdot CC' = \left(\sqrt{3} + 4 + \frac{4}{\sqrt{3}} \right) r^2.$$

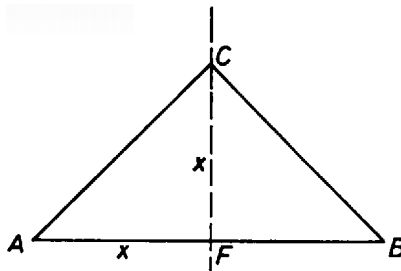
4. Az egyenletrendszer pontosan akkor értelmezhető, ha x és y egyaránt 1-től különböző pozitív számok. Az első egyenlet, $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = \frac{5}{2}$ alapján $\log_x y = 2$ vagy $\log_x y = \frac{1}{2}$, azaz $y = x^2$ vagy $x = y^2$. Ezeket a második egyenletbe helyettesítve – egyúttal figyelemmel x és y pozitív előjelére, – kapjuk, hogy

i) $4\sqrt{x} - 3x = 1$, szorzattá alakítva $(\sqrt{x} - 1)(3\sqrt{x} - 1) = 0$, $x = 1$ vagy $x = \frac{1}{9}$. Az első érték nem felel meg az eredeti kikötésünknek, a második alapján $y = \frac{1}{81}$ illetve

ii) $4y - 3\sqrt{y} = 1$, másképpen $(\sqrt{y} - 1)(4\sqrt{y} + 1) = 0$, $y = 1$ (mivel a második tényező biztosan pozitív). Ezen az ágon tehát nem kaptunk megoldást.

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát az $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{81}\right)$ pár.

5. Mivel $AP = BP$, azért P -nek illeszkednie kell az AB szakasz felező merőlegesére, amellyel az eredeti háromszöget az AFC és BFC – szintén egyenlő szárú derékszögű – háromszögekre oszthatjuk.



Legyen $AF = FC = x!$

i) Ha P a háromszögön belül van, akkor Pitagorasz tétele szerint

$$AF^2 + FP^2 = AP^2,$$

azaz $x^2 + (x - 1)^2 = 5$, így $x = 2$, a háromszög területe $T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot FC = x^2 = 4$ területegység.

ii) Amennyiben P a szakaszfelező merőleges C -n túli meghosszabbításán van, úgy az előzőek mintájára $x^2 + (x + 1)^2 = 5$, vagyis $x = 1$, így a terület is 1.

iii) P nem lehet az FC egyenes F -en túli meghosszabbításán, mivel akkor az APC háromszögben az $AP = \sqrt{5}$ hosszú oldallal szemben 45° -os, míg a $CP = 1$ oldallal szemben egy 45° -osnál nagyobb szög volna, ami nem lehetséges.

6. Az adott kifejezés értelmezhetőségének szükséges és elégséges feltétele, hogy

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|--------------|
| i) a négyzetgyök miatt | $3 \cos x - \cos 2x - 2 \geq 0,$ | és |
| ii) a logaritmus miatt | $2 - x - x^2 > 0,$ | és |
| iii) a nevező miatt | $2 - x - x^2 \neq 1$ | teljesüljön. |

Az egyes feltételeket külön-külön vizsgálva:

i) $3 \cos x - \cos 2x - 2 = -(2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1) = -(2 \cos x - 1)(\cos x - 1)$, ami éppen akkor nemnegatív, ha $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$;

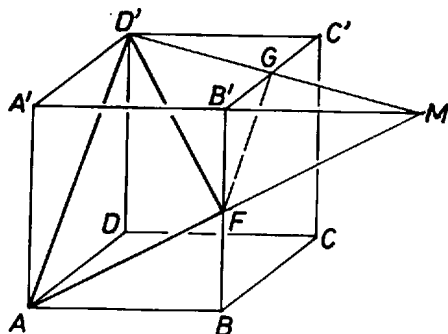
ii) $2 - x - x^2 = -(x + 2)(x - 1)$, akkor és csak akkor pozitív, ha $-2 < x < 1$;

iii) $2 - x - x^2 \neq 1$, tehát x nem lehet sem $(\sqrt{5} - 1)/2$, sem $(-\sqrt{5} - 1)/2$.

Összefoglalva – például a számegyenesen történő ábrázolással –

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3}; 1\right) \setminus \left\{ \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \right\}.$$

7. Legyen az egysíkú AF és $A'B'$ egyenesek metszéspontja M . Ekkor – mivel F a BB' felezőpontja – az ABF és $FB'M$ háromszögek egybevágósága miatt $B'M = AB$.



Összekötve az $A'B'C'D'$ síkban lévő M és D' pontokat, ez az egyenes a $B'C'$ szakaszt annak G felezőpontjában metszi. Ez a pont szintén eleme a metsző síknak, tehát az a kockából az $AFGD'$ egyenlő szárú trapézt metszi ki, egyúttal az $AD'A'FGB'$ csonkagúlát vágja le, ennek térfogata az $AD'A'M$ gúla térfogatának $\frac{7}{8}$ -része, vagyis – a kocka élét egységnyinek választva:

$$V_1 = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{7}{24},$$

így a maradék test V_2 térfogata $1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$, tehát: $V_1 : V_2 = 7 : 17$.

8. a) Igazoljuk először, hogy minden konvex négyszögben $t_1 t_3 = t_2 t_4$, ahol t_1, t_2, t_3 és t_4 az átlók által létrehozott háromszögek területét jelölik. Például a trigonometrikus területképlettel

$$\begin{aligned} t_1 t_3 &= \frac{1}{2} \cdot MA \cdot MD \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} \cdot MB \cdot MC \cdot \sin x = \\ &= \frac{1}{2} \cdot MA \cdot MB \cdot \sin(180^\circ - x) \cdot \frac{1}{2} \cdot MC \cdot MD \cdot \sin(180^\circ - x) = t_2 t_4. \end{aligned}$$

b) Mivel feladatunkban a négyszög egészének területéről kell mondanunk valamit, keressünk kapcsolatot a t_1, t_2, t_3 és t_4 mennyiségek összege (a teljes terület) és szorzataik (ezek közül két egyenlő adott) között. A – számtani és mértani középére vonatkozó – Cauchy-egyenlőtlenség szerint az a és b nemnegatív számokra $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$, kis átrendezéssel $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_1 + t_3 + t_2 + t_4 \geq 2\sqrt{t_1 t_3} + 2\sqrt{t_2 t_4} = 2,$$

ezért a négyszög területe legalább 2 egység.

c) Egy adott körbe írható négyszögek területe nyilván nem lehet tetszőlegesen nagy, a maximális területtel közülük a négyzet rendelkezik. Ez belátható – többek között – úgy, hogy a négyszög két szemközti csúcsát rögzítettnek gondolva, a másik kettőt az ívfelező pontokba – tehát egy átmérő két végpontjába – mozgatva a terület növekszik (biztosan nem csökken), majd a szemközti csúcsok szerepét megcserélve ismét nő. Ekkor az eredeti négyszögiünket – területét nem csökkentve – négyzetté alakítottuk, annak területe tehát bármely más négyszögét meghaladja. Feladatunkban egy egységnyi sugarú körbe írtunk négyszöget. Az előzőek szerint tehát ennek területe nem lehet nagyobb, mint a körbe írható négyzet területe, azaz 2 területegység.

A b) és c)-beli eredményeink alapján állíthatjuk, hogy a vizsgált négyszög területe 2 egység.