

Megoldásvázlatok és eredmények az áprilisi szám mérőlapjához

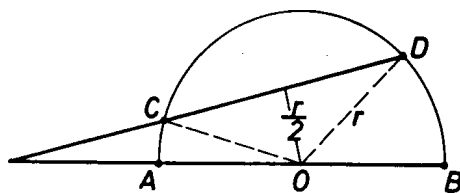
1.a. A négyzetgyökvonás miatt $4 - x^2 \geq 0$, azaz $-2 \leq x \leq 2$, egyúttal a baloldalon álló $\sqrt{4 - x^2}$ kifejezés sem lehet negatív. Ha $x = -1$ vagy $x = -2$ vagy $x = 2$, akkor a bal oldal 0. A szorzat pontosan akkor negatív, ha tényezői ellentétes előjelűek: $x + 1 < 0$, ha $x < -1$. Összefoglalva: $x \in [-2, -1] \cup \{2\}$.

b. A $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - 1$ trigonometrikus azonosság és a $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{6} = 3$ egyenlőség felhasználásával:

$$\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 2 \geq 0,$$

amely akkor és csak akkor igaz, ha $\cos \frac{x}{2} \leq -1$ vagy $\cos \frac{x}{2} \geq 2$. Ez utóbbi nem lehetséges. Az első relációban csak az egyenlőség teljesülhet, így $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. Mivel $\sqrt{5}^{\sin(1993\pi)} = \sqrt{5}^0 = 1$ és $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 16 = -8$, a $3^{x^2 - x} \geq 9$ egyenlőtlenség egyenértékű az eredetivel. Tekintve, hogy a 3-as alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő, ebből $x^2 - x \geq 2$ következik, ahonnan $x \leq -1$ vagy $x \geq 2$.



1. ábra

2. Használjuk az 1. ábra jelöléseit! A vizsgált alakzat az OAC és OBD körcikk, valamint az ODC háromszög. Ez utóbbi egyenlő szárú és $\angle OCD = \angle ODC = 30^\circ$ és $\angle COD = 120^\circ$. A két körcikkben a középponti szögek összege 60° , együttes kerületük: $\frac{2r\pi}{6}$, területük: $\frac{r^2\pi}{6}$.

$$k = AB + BD_{\text{ív}} + DC + CA_{\text{ív}} = 2r + r\sqrt{3} + \frac{2r\pi}{6}.$$

$$t = t_{ODC\Delta} + t_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{r^2\pi}{6}.$$

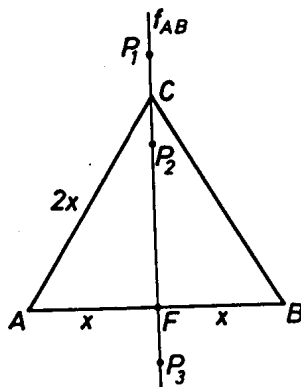
3. A számtani sorozat első három eleme $a_1 = x - d$, $a_2 = x$ és $a_3 = x + d$, ahol $d \neq 0$. A feltételek szerint $g_1 = a_1 a_2 = (x - d)x$, $g_2 = a_2 a_3 = x(x + d)$ és $g_3 = a_3 a_1 = (x + d)(x - d)$ egy mértani sorozat tagjai, ami pontosan akkor teljesül, ha

$$g_2^2 = g_1 g_3, \quad \text{azaz} \quad [x(x + d)]^2 = (x - d)^2 x(x + d).$$

A művelet elvégzése után $3xd = d^2$, mivel $d \neq 0$.

$3x - d = 0 \Leftrightarrow d = 3x$, ekkor $a_1 = -2x$, $a_2 = x$ és $a_3 = 4x$, valamint $g_1 = -2x^2$, $g_2 = 4x^2$ és $g_3 = -8x^2$, amiből, mivel d , és így x is 0-tól különböző, a keresett hányados $q = -2$.

4. Először vegyük észre, hogy az $AP = PB$ miatt $p \in f_{AB}$. Ezt a szakaszfelező merőlegest az AB szakasz F felezőpontja és a C pont két félegyenesre és egy szakaszra bontja. Vizsgáljuk meg, ezek melyikén helyezkedhet el a P pont (2. ábra).



2. ábra

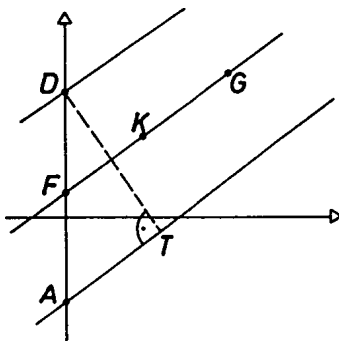
i) Ha P_1 a CF szakasz C -n túli meghosszabításán van, akkor a P_1AF derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint $AF^2 + FP_1^2 = AP_1^2$, vagyis $x^2 + (x\sqrt{3} + 2\sqrt{3})^2 = 52$, amelynek pozitív gyöke $x = 2$, s így a háromszög területére a $t = x^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ értéket kapjuk.

ii) Ha P_2 a CF szakasz belső pontja, akkor $x^2 + (x\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2 = 52$, ebből $x = 5$, a háromszög területére $t = 25\sqrt{3}$ adódik.

iii) Amennyiben P_3 a CF -nek F -en túli meghosszabításán van $-F$ -et is beleértve –, úgy az AP_3C háromszögben az $AP_3 = 2\sqrt{13}$ nagyságú oldallal szemben 30° -os szög, míg a nála kisebb $CP_3 = 2\sqrt{3}$ szakasszal szemben egy legalább 60° -os szög található, ez pedig nem lehetséges.

A feladat feltételeinek tehát két háromszög felel meg, területeik $4\sqrt{3}$, illetve $25\sqrt{3}$ egység.

5. Az első egyenes egyenletét átrendezve: $y = \frac{3}{4}x + 6$, azaz a két egyenes párhuzamos. Az $A(0; -4)$ és a $D(0; 6)$ csúcspontok is azonnal meghatározhatók. Ezek a négyszög szomszédos csúcsai, $AD = 10$ egység, $DT = 8$ a beírható kör átmérője, azaz $r = 4$. A beírt kör K középpontja a $(4; 4)$ pont lesz (3. ábra).



3. ábra

A feladat feltételei szerint a vizsgált négyszög rombusz vagy szimmetrikus trapéz lehet. Az első esetben negyedik oldalának egyenlete $x = 8$, hiányzó csúcsai: $B_1(8; 2)$ és $C_1(8; 12)$.

Szimmetrikus trapéz esetén az AD oldal $F(0; 1)$ felezőpontjának a kör $K(4; 4)$ középpontjára vonatkozó $G(8; 7)$ tükörképe lesz a B_2C_2 szár felezőpontja, s ettől az illető szár felével egyenlő távolságban – 5 egységre – keresendők az alapokon a hiányzó csúcsok: $B_2\left(\frac{16}{5}; \frac{42}{5}\right)$ és $C_2\left(\frac{64}{5}; \frac{28}{5}\right)$.

6. A $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ és a $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ azonosságok alkalmazásával

$$(1) \quad (2 \cos x - 1)(\sin x - p) = 0$$

és

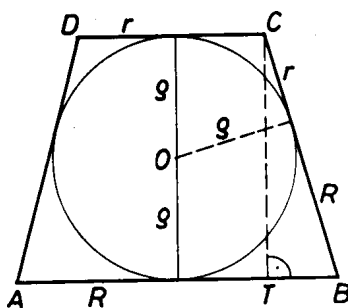
$$(2) \quad (4 \cos x - p)(\cos x - p) = 0.$$

Látható, hogy a paramétertől függetlenül 1-nek a $\cos x = \frac{1}{2}$ megoldása, ezt a (2) egyenletbe helyettesítve a $(2 - p)\left(\frac{1}{2} - p\right) = 0$ egyenletet kapjuk. Ez pontosan akkor teljesül, ha $p = 2$ vagy $p = \frac{1}{2}$.

i) $p = 2$ esetén az (1) egyenletnek a már említettekén kívül további megoldása nincs.

ii) Ha $p = \frac{1}{2}$, akkor (1)-ből $\sin x = \frac{1}{2}$ miatt például $x = \frac{\pi}{6}$ is lehetséges megoldás, ám ez az érték nem tesz eleget a (2) egyenletnek, hiszen $\left(4 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) > 0$. Azaz ekvivalencia csak $p = 2$ esetén áll fenn.

7. A vizsgált testnek a $-kúp$ tengelyére illeszkedő és az alaplapjaira merőleges – síkmetszetéből a CTB derékszögű háromszögben $CT = 2\rho$, $TB = R - r$ és $CB = R + r$, így Pitagorasz tétele alapján $\rho^2 = rR$.



4. ábra

$\frac{V_{g\ddot{o}mb}}{V_{k\ddot{u}p}} = \frac{\frac{4}{3}\varrho^3\pi}{\frac{2\varrho\pi}{3}(r^2 + rR + R^2)} = \frac{2\varrho^2}{r^2 + rR + R^2} = \frac{2rR}{r^2 + rR + R^2} = \frac{2}{\frac{r}{R} + 1 + \frac{R}{r}}$, ekkor pedig mivel $\frac{r}{R}$ pozitív szám, és reciproka $\left(\frac{R}{r}\right)$, összegük legalább 2, a tört nevezője legalább 3, vagyis a tört értéke legfeljebb $\frac{2}{3}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\frac{r}{R} = 1$, vagyis a csonakkúp henger. „Valódi” kúp esetén a kérdéses arány $\frac{2}{3}$ -nál kisebb, de bármely $\epsilon > 0$ mellett van olyan arány, amelyre $\frac{V_g}{V_k} > \frac{2}{3} - \epsilon$.

8. A második egyenlet a következő alakban írható:

$$-\sin^2(\pi x) = \sin^2(\pi y).$$

Tekintve, hogy a bal oldalon nem pozitív, a jobb oldalon pedig nem negatív szám áll, az egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha mindkét kifejezés értéke 0.

Így $\sin^2(\pi x) = 0$ és $\sin^2(\pi y) = 0$ miatt x és y egyaránt egész számok kell legyenek, vagyis az első egyenletet az egész számpárok körében kell megoldanunk. Átalakítva

$$[2(x + y)]^2 + (x - 2)^2 = 8,$$

de 8 két négyzetszám összegeként csupán a $4 + 4$ alakban állítható elő, ezért

$$[2(x + y)]^2 = 4 \quad \text{és} \quad (x - 2)^2 = 4.$$

A második összefüggés $x = 0$ vagy $x = 4$ esetén igaz, majd az x -re kapott értékek segítségével az első egyenletből y lehetséges értékei is adódnak. A feltételeknek eleget tevő számpárok tehát $(0; -1)$, $(0; 1)$, $(4; -5)$ vagy $(4; -3)$. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy a felsoroltak valóban megoldások.