Megoldásvázlatok, eredmények a februári szám mérőlapjához

1. Két ilyen kúp van:

$$3V_1/\pi = x_1^2x_2,$$
$$3V_2/\pi = x_2^2x_1,$$
$$3(V_1+V_2)/\pi = (x_1^2x_2+x_2^2x_1) = x_1x_2(x_1+x_2) = 57\cdot 16.$$

Vagyis $V_1+V_2=304\pi$.

2. A háromszög területére ismert képletek:

$$t = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = rs,$$

ahol r a beírt kör sugara. Szorozzuk össze ezt a négy egyenletet:

$$t^4 = r_ar_br_crs(s-a)(s-b)(s-c).$$

De

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = t^2,$$

ezért $t^2 = r_ar_br_cr$. Így $t=84$ területegység, az oldalak pedig $13, 14, 15$ egység hosszúak.

3. Három nemnegatív valós szám összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik nulla. A 13 és a -5 az elsőt, a 13 és a -13 a másodikat teszi nullává, igy ha van megoldás, az csak a 13 lehet. Az $x=13$ esetén a harmadik kifejezésből a $p=-20$ adódik.

4. A köréírt kör középpontja $K(4;4)$. A feltételek alapján az egyik magasság merőleges az x tengelyre, ezért az A csúcs $(2;10)$. Tudjuk, hogy a magasságpontot az oldal egyenesére tükrözve a kép a köréírt körön lesz. Ezt felhasználva: $M'(2;-2)$. Az MM' felezőpontja $(2;2)$, rajta van az x tengellyel párhuzamos oldalon. Számolással kapjuk: $B(-2;2),\ C(10;2),\ a=12,\ b=8\sqrt{2},\ c=4\sqrt{5}$, valamint $t=48$ területegység. A $t=\varrho\cdot s$ képlet segítségével kapjuk a beírt kör sugarát, $\varrho = 48/(6+4\sqrt{2}+2\sqrt{5})\approx 3$.

5. Az értelmezési tartományt az $x^2-8x+15>0$ feltétel adja, amiből $x<3$ vagy $5<x$ következik.

Az egyenlet $y^2-(a+b+1)y+(a+b)=0$ alakú egyenletté rendezhető, ahol $y=\log_3(x^2-8x+15),\ a+b=\log_3 5+\log_3 7=\log_3 35$. Így $y_1=\log_3 35,\ y_2=1\ (=\log_3 3)$. Ezekből $x_1=-2,\ x_2=10,\ x_3=2,\ x_4=6$.

A kapott gyökök benne vannak az értelmezési tartományban. Ellenőrzéssel a helyességükről is meggyőződhetünk.

6. Az $z=\sin^2 x$ helyettesítéssel és rendezéssel kapjuk:

$$z^2+z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} = 2^{1+\cos y}.$$

A $z=0$ nyilván nem gyök, így $z>0$. Az egyenlet egyik oldalán két pozitív szám és a reciprokuk szerepel, ezért ez az oldal nagyobb vagy egyenlő 4. Vagyis $\cos y=1,\ z=\sin^2 x=1$ kell, hogy legyen. Ebből $\sin x=1$ vagy $\sin x=-1$ adódik. A megoldás: $x=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi,\ y_2=2k_2\pi$, ahol k_1 és k_2 egész.

7. A keresett pont koordinátái $(\cos\alpha;\sin\alpha)$. Az α szög meghatározásával a pont is ismert lesz az egység sugarú körön. $x^2+xy+y^2=\cos^2 a+\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha = 1+0,5\sin 2\alpha$, ez akkor maximális, ha $\sin 2\alpha=1$, amiből $\alpha=45^\circ$ vagy $\alpha=225^\circ$. $1+0,5\sin 2\alpha$ akkor minimális, ha $\sin 2\alpha=-1$, amiből $\alpha=135^\circ$ vagy $\alpha=315^\circ$.