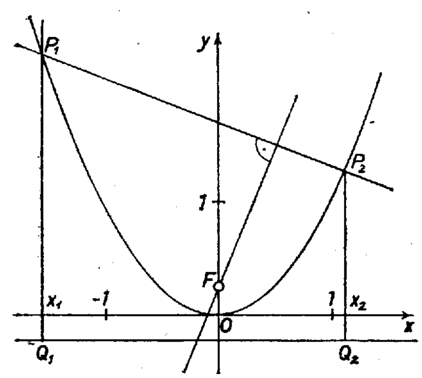
I. megoldás. Helyezzük el koordináta-rendszerünket úgy, hogy a parabola csúcsérintője az x tengellyel, a parabola tengelye az y tengellyel essék egybe, az egységet pedig válasszuk meg úgy, hogy a parabola fókuszának két koordinátája $F\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ legyen. Ekkor a parabola egyenlete: $y = x^2$, vezéregyenesééé $y = -\frac{1}{4}$.



Így a parabola tetszőleges két pontjának koordinátái $P_1(x_1,\ x_1^2)$, $P_2(x_2,\ x_2^2)$. A P_1, P_2 pontokra illeszkedő egyenes meredeksége

$$m_1 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2.$$

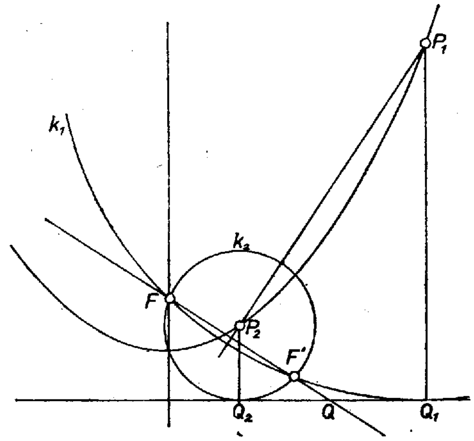
Írjuk fel az F-en átmenő, P_1P_2 egyenesre merőleges egyenes egyenletét. Ha $m_1 \neq 0$, akkor e merőleges egyenes meredekségét m_2-vel jelölve igaz, hogy $m_1 \cdot m_2 = -1$, azaz $m_2 = -\frac{1}{x_1 + x_2}$. Az egyenes az y tengelyt az $F\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ pontban metszi, így egyenlete:

$$y = -\frac{1}{x_1 + x_2}x + \frac{1}{4}. \tag{2}$$

A Q_1, ill. Q_2 pont koordinátái: $\left(x_1;\ -\frac{1}{4}\right)$, $\left(x_2;\ -\frac{1}{4}\right)$ és a Q_1Q_2 szakasz felezőpontja: $Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$. Ezekre a koordinátákra teljesül (2), tehát az állítás igaz, ha $m_1 \neq 0$.

Ha $m_1 = 0$, vagyis $x_1 = -x_2$, akkor a P_1P_2 egyenes párhuzamos az x tengellyel, így a rá merőleges egyenes párhuzamos az y tengellyel. Mivel F illeszkedik az y tengelyre, ezért ez az egyenes maga az y tengely. A Q_1, Q_2 szakasz felezőpontja ekkor a $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ pont, vagyis ez a pont az y tengelyen van, ezért az állítás akkor is igaz. Ezzel a bizonyítandó állítást x_1, x_2 minden értékpárjára bizonyítottuk.

II. megoldás. A parabola definíciójából következik, hogy $P_1Q_1 = P_1F$. Tekintsük a P_1 középpontú P_1F sugarú kört! A P_1P_2 egyenes e körnek szimmetriatengelye, ezért a kör bármely pontját tükrözve rá, e körön levő pontot kapunk. Tükrözzük F-et P_1P_2-re, a (tőle nem feltétlenül különböző) tükörképét jelöljük F'-vel.



Így $P_1F' = P_1F$, és F' rajta van a P_1P_2-re merőleges, F-re illeszkedő egyenesen. Ennek az egyenesnek, és a parabola vezéregyenesek metszéspontja legyen Q. (Q csak akkor nem létezne, ha e két egyenes párhuzamos lenne, azaz P_1P_2 merőleges lenne a vezéregyenesre, ez azonban lehetetlen, mert bármely, a vezéregyenesre merőleges egyenesen csak egy pontja van a parabolának.)

Ekkor Q-nak a körre vonatkozó hatványa: $QF' \cdot QF = QQ_1^2$. Hasonlóan a P_2 középpontú, F-en átmenő körre vonatkozó hatvány: $QF' \cdot QF = QQ_2^2$, azaz $Q_1Q^2 = Q_2Q^2$, ami ekvivalens az állítással.