1. Az egyenletnek $x=1$ és $x=\dfrac{-1}{3}$ kivételével minden valós számra van értelme. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát a $(3x+1)(x-1)$ kifejezéssel, majd rendezzük az egyenletet. Az így kapott $17x^2+5x-22=0$ egyenlet $x_1=1$ gyöke az adott egyenletnek nem megoldása, míg az $x_2=\dfrac{-22}{17}$ az adott egyenlet egyetlen megoldása.

2. Alkalmazhatjuk a $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, illetve a $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ azonosságokat. Ekkor az adott kifejezés

$$\sqrt{(2\cos^2\alpha-3)^2}+\sqrt{(2\sin^2\alpha-3)^2}=|2\cos^2\alpha-3|+|2\sin^2\alpha-3|$$

alakban írható. Mivel $2\cos^2\alpha-3<0$ és $2\sin^2\alpha-3<0$, ezért az adott kifejezés

$$(3-2\cos^2\alpha)+(3-2\sin^2\alpha)=4.$$

A kifejezés értéke minden valós a esetén 4.

3. A rendezéssel kapott $x^2+(5-m)x+4>0$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a másodfokú polinom diszkriminánsa negatív, azaz $D=(5-m)^2-16<0$. Ez $1<m<9$ esetén igaz.

4. Legyen a B pont ordinátája h, azaz $B(0,h)$. Az $\overrightarrow{AB}(6,h)$ és a $\overrightarrow{CB}(-1,h+1)$ merőleges vektorok, tehát skaláris szorzatuk 0.

$$-6+h(h+1)=0,\qquad h_1=2,\qquad h_2=-3.$$

Ha $B_1(0;2)$, akkor $D_1(-5;-3)$, ha $B_2(0;-3)$, akkor $D_2(-5;2)$.

5. A feltétel szerint $5a_n=S_{n-1}$, azaz

$$5\cdot(12+(n-1)(-2))=\frac{n-1}{2}(24+(n-2)(-2)),$$

ahonnan

$$n^2-25n+84=0,\qquad n=4\qquad \text{vagy}\qquad n=21.$$

Így $a_4=6$, és ekkor valóban $S_3=30=5\cdot 6$ vagy $a_{21}=-28$, és ekkor $S_{20}=-140=5\cdot(-28)$.

6. a) Ha a havi kamatláb p, akkor

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{12}=1,3,\qquad q=1+\frac{p}{100}=\sqrt[12]{1,3}=1,022104,\qquad p=2,21.$$

b) Az első hónap elején elhelyezett 2000 Ft értéke a 24. hónap végén $2000\cdot q^{24}$, a második hónap elején elhelyezett 2000 Ft értéke a 24. hónap végén $2000\cdot q^{23},\dots$, a 18. hónap elején elhelyezett 2000 Ft értéke a 24. hónap végén $2000\cdot q^7$.

A 24. hónap végén összesen

$$2000\cdot q^{24}+2000\cdot q^{23}+\dots+2000\cdot q^7=2000\cdot q^7\cdot\frac{q^{18}-1}{q-1},$$

azaz 50847 forintunk lesz.

7. A $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}$ és a $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ azonosságok alkalmazásával az egyenlet értelmezési tartománya $(x\neq\dfrac{\pi}{4}+n\dfrac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z})$ szűkül, $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$-vel, $k\in\mathbb{Z}$.

Ha $x_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, akkor mindkét oldal helyettesítési értéke 1, így ezek megoldások. Ha $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, akkor a kapott

$$\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+1$$

egyenletnek nincs megoldása.

Az egyenlet megoldásai az $x_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ számok. Az egyenlet más módon is megoldható. Hogyan?

8. Mivel $x>0, y>0$ és $x+y=1$, ezért

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},\qquad 1\geqslant 2\sqrt{xy},\qquad 1\geqslant 4xy,\qquad \frac{1}{2}\geqslant 2xy,\qquad \frac{1}{xy}\geqslant 4,\qquad \frac{1}{x^2y^2}\geqslant 16$$

és

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2xy\geqslant\frac{1}{2}.$$

Ezek alkalmazásával

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2=x^2+y^2+4+\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\geqslant\frac{1}{2}+4+16\cdot\frac{1}{2}=\frac{25}{2}.$$

A két kifejezés akkor egyenlő,ha $\dfrac{x+y}{2}=\sqrt{xy}$, azaz ha $y=\dfrac{1}{2}$.