Az 1992–93 tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny matematika feladatai [1]

Első (iskolai) forduló
I. kategória

1. Egy háromjegyű természetes szám számjegyeivel kétféleképpen képeztünk egy-egy új háromjegyű számot. Először az első számjegyet az eredeti szám harmadik számjegye mögé írtuk, másodszor pedig az eredeti számban felcseréltük az első és a harmadik számjegyet. Az első esetben az eredeti számnál 225-tel, másodszor pedig 495-tel kisebb számot kaptunk. Mi lehetett az eredeti (tízes számrendszerbeli) szám?

2. Határozzuk meg k értékét, ha a, b pozitív valós számok, $a \neq 1$ és $b \neq 1$, valamint

$$k^2 + \log_a^2 b + \log_b^2 a = 4 \log_a b - 2k \log_b a - 4$$

teljesül!

3. Egy a oldalhosszúságú négyzet egyik csúcsa A. Az AB oldal A-tól p távolságra lévő pontja P $(p < a/2)$. P-ből érintőt húzunk a négyzet beírt köréhez. Ez az érintő A-tól milyen távolságra metszi az AD oldalt?

4. Legyen $A = n^5 - 5n^3 + 4n + 1$, ahol n természetes szám. Igazoljuk, hogy bármely n esetén az A szám ugyanarra a számjegyre végződik!

5. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög oldalhosszúságai akkor és csak akkor alkotnak számtani sorozatot, ha a háromszögnek van olyan magasságvonala, amelynek a háromszögbe eső szakasza háromszor akkora, mint a háromszögbe írható kör sugara!

6. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyekben $\alpha = 120^\circ$. Ezek közül melyekben a legnagyobb a másik két szög (β és γ) tangensének a szorzata? Határozzuk meg a szorzat maximumát!

II. kategória

1. Hány éves lesz 1992 Szilveszter napján az a XX. században született ember, akinek születési évszáma három köbszám összege, és ugyanakkor egy 1-nél nagyobb köbszám többszöröse?

2. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának felezőpontja F_1, az AD oldalé F_2. Milyen arányban osztják egymást a DF_1 és CF_2 szakaszok?

3. Jelöljük P-vel az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsának a háromszög köré írt kör O középpontjára vonatkozó tükörképét. A kör P pontbeli érintője az AB oldalegyenest X-ben, az AC oldalegyenest Y-ban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a B, C, Y, X pontok egy körön vannak!

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy koordináta-rendszerben bármely $P(x; y)$ ponthoz a $P'(x - y + 1;\ x + y - 1)$ pontot rendeljük hozzá, akkor ez a transzformáció hasonlóság.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha x és y 1-nél nagyobb valós számok, akkor

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geqslant 8.$$

Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

III. Kategória

1. Adjuk meg az összes olyan $t > 1$ egészet és $k > 0$ *páratlan* számot, amelyre $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + t^k$ prímszám.

2. Adott a térben négy nem egy síkban fekvő pont. Hány olyan sík van, amelytől mind a négy pont egyenlő távol van?

3. Mely p prímszámok esetén lesz $(2^{p-1} - 1)/p$ négyzetszám?

4. Tegyük fel, hogy egy konvex nyolcszögben minden szög egyenlő, és bármely két oldal hosszának aránya racionális szám. Mutassuk meg, hogy a nyolcszög középpontosan szimmetrikus.

5. Az asztalra kiteszünk páratlan számú, de 1-nél több gyufaszálat. Ketten felváltva vesznek el ebből gyufákat azzal a megkötéssel, hogy minden egyes lépésben legalább egy gyufát el kell venni, és sohasem szabad egyszerre az eredeti gyufaszám felénél többet elvenni. Amikor elfogynak a gyufák, akkor megszámoljuk, kihez hány gyufaszál került. A játékot az nyeri, akinél ekkor páros sok gyufa van. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

A verseny második fordulójának feladatai

[1] Az OKTV-n a középiskolák III.– IV. osztályos tanulóit három kategóriába sorolják:
I. kategória: a szakközépiskolák tanulói;
II. kategória: a gimnáziumi tanulók, kivéve azokat, akik a matematikát speciális tanterv szerint tanulják;
III. kategória: a gimnáziumok speciális matematika osztályainak tanulói.

I. kategória

1. Az a valós paraméter mely értékei mellett van a

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-a}=2$$

egyenletnek megoldása a valós számok halmazán?

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$2\cos 2x+\cos 6x+\cos 10x=2\cos^2 x-1.$$

3. Egy egységsugarú körbe négyzetet írunk, amelynek a csúcsai az A, B, C, D pontok. A kör kisebbik AB ívén úgy veszünk fel egy E pontot, hogy az AEB háromszög területe a négyzet területének 1/10-e legyen.

Határozzuk meg az EAB szög tangensének a pontos értékét!

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x+y+z=3$$
$$x^3+y^3+z^3=3.$$

5. A k körvonalat az AB húr két körívre osztja. Az egyik íven adott 12 pont: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{12}$ úgy, hogy P_1 az A és P_2 között, P_2 a P_1 és P_3 között, és így tovább, P_{12} a P_{11} és B között van.

A másik íven határozzuk meg azt a P pontot, amelyre a PP_1P_2, PP_2P_3, PP_3P_4, $\ldots$, $PP_{11}P_{12}$ háromszögek területének összege maximális! Hogyan szerkeszthetnénk meg a feltételeknek megfelelő P pontot?

II. kategória

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x}=\frac{7}{6}$$

2. Hány olyan 1993-nál kisebb pozitív egész n szám van, amelyre
$1^n+2^n+3^n+4^n$ osztható 30-cal?

3. Tekintsük a k körbe írt olyan háromszögeket, amelyeknek egyik csúcsa a kör egy rögzített C pontja, a C-vel szemközti oldal pedig állandó c hosszúságú; c kisebb k átmérőjénél.

Határozzuk meg az összes ilyen háromszög magasságpontjának a halmazát (mértani helyét)!

4. Egy osztály tanulói egymás után kimennek a táblához; az első ráír az üres táblára egy 2-est; a táblához érkező minden további tanuló összeadja a táblán lévő számok négyzetét, ehhez hozzáadja a táblán lévő számok számát, és ezt az összeget felírja a táblára (a táblán tehát rendre a $2, 5, 31, 993, \ldots$ számok jelennek meg).

Bizonyítsuk be, hogy a táblára nem kerül négyzetszám.

III. kategória

Döntő

1. A természetes számok mindegyikét kiszínezzük 1993 szín valamelyikével úgy, hogy mindegyik szín végtelen sokszor előforduljon. Igaz-e, hogy bármely ilyen színezés esetén keletkezik olyan háromtagú számtani sorozat, amelynek mind a három tagja különböző színű?

2. Tegyük fel, hogy egy körben két egyenlő hosszúságú húr, amelyek egyik végpontja közös, α szöget zár be egymással. Van-e α-nak olyan értéke, hogy a körben egynél több olyan húr létezik, amelyet az adott húrok három egyenlő részre osztanak?

3. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész felírható olyan pozitív egészek összegeként, amelyek egyikének sincs 3-nál nagyobb prímosztója, és egyik tag sem osztója valamelyik másiknak. (A tagok számára nincs megkötés, az „egytagú összeg” is megengedett.)

A verseny harmadik fordulójának feladatai

I. kategória

Döntő

1. Oldja meg az

$$x^3 + y^3 = 35;$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$$

egyenletrendszert a valós számok halmazán!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $a,\ b,\ p,\ q,\ r,\ s$ pozitív egész számok,
és $qr - sp = 1$,
és $p/q < a/b < r/s$,
akkor
$b \geqslant s + q$.
Adjon meg hat olyan pozitív egész számot, amelyek a feladat feltételeit kielégítik!

3. Egy 2 egység oldalú szabályos háromszöget a súlypontján áthaladó egyenessel két részre osztunk. Milyen két érték között változik a részek területének az aránya?

II. kategória

Döntő

1. Jelentsen p pozitív számot. Határozzuk meg adott p esetén azt a legnagyobb C valós számot, amely mellett az

$$x^2 + y^2 + pxy \geqslant C(x+y)^2$$

egyenlőtlenség minden nemnegatív $x,\ y$ értékpárra teljesül.

2. Egy háromszög belsejében helyezzünk el három olyan kört, amelyek érintik a háromszög két-két oldalát, továbbá kívülről érintik a háromszög beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy a három kis kör sugarának az összege nem kisebb a beírt kör sugaránál. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a feladat tetraéderre vonatkozó általánosítását, amelyben a beírt köröknek a tetraéder lapjait érintő gömbök felelnek meg.

3. n számú játékos ($n \geqslant 2$) a következő szabály szerint játszik: minden játszmában egy vesztes van, aki pedig veszít, az megduplázza a többiek pénzét. A játék kezdetekor – forintban kifejezve – mindenkinek pozitív egész értékű pénze volt, és ezeknek az összege a játék folyamán nem változott meg. Összesen n játszmát játszottak, és mindegyik játékos pontosan egyszer veszített. Az n-edik játszma befejezése után minden játékosnak q forintja volt.

Bizonyítsuk be, hogy $q \geqslant 2^n$.

Adjunk példát arra, hogy az egyes játékosok mekkora pénzösszeggel rendelkezhettek a játék kezdetén.