I. forduló
Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Bontsa fel az 1000-et három szám összegére úgy, hogy ha az elsőből 4-et kivonunk, a másodikhoz 4-et hozzáadunk, a harmadikat 3-mal elosztjuk, a kapott számok aránya 2 : 3 : 5 legyen!

2. Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 + 2y = 13 + y^2.$$

3. Adott egy e egyenes és azon az A és B rögzített pontok. Mi azon érintkező körök érintési pontjainak halmaza, amelyek egyike az e egyenest A-ban, a másikat pedig B-ben érinti?

4. Legyen $n \geqslant 2$ egész. Bizonyítandó, hogy $4n^4 + 1$-nek létezik legalább két különböző pozitív prímosztója.

5. Tükrözze a hegyesszögű háromszög egyik csúcsát a köré írt kör középpontjára, majd a tükörképet a kiindulásul vett csúccsal szemközti oldal felezőpontjára. Igazolja, hogy az így kapott pont nem függ attól, hogy a háromszög melyik csúcsából indultunk ki.

Haladók (II. osztályosok)

Szakközépiskolások

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= 20 \\ y(x+y+z) &= 30 \\ z(x+y+z) &= 50. \end{aligned}$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalainak száma 6-nál nagyobb, akkor legalább egy oldalán két tompaszög fekszik.

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$3x + \frac{3}{x} = 6 - \sqrt{1 - x^2}$$

4. Egy téglalap mindegyik oldalára, mint átmérőkre, rajzoljunk olyan félköröket, amelyek a téglalapon kívül vannak. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap köré írt kör és a rajzolt félkörök által meghatározott négy „holdacska” alakú síkrész területösszege egyenlő a téglalap területével.

5. Van-e két olyan pozitív egész szám, amelyek legkisebb közös többszöröse megegyezik négyzetük számtani közepével?

6. Egy sakkversenyen kétszer annyi férfi vett részt, mint nő. Mindenki mindenkivel játszott pontosan egyszer. Döntetlen nem volt, és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint hét az öthöz. Hányan vettek részt a versenyen?

Nem speciális matematika tantervű középiskolások

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalainak száma 6-nál nagyobb, akkor legalább egy oldalán két tompaszög fekszik.

2. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros?

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$3x + \frac{3}{x} = 6 - \sqrt{1 - x^2}$$

4. Van-e két olyan pozitív egész szám, amelyek legkisebb közös többszöröse megegyezik négyzetük számtani közepével?

5. Egy sakkversenyen kétszer annyi férfi vett részt, mint nő. Mindenki mindenkivel játszott pontosan egyszer. Döntetlen nem volt, és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint hét az öthöz. Hányan vettek részt a versenyen?

6. Egy konvex négyszöget átlói négy olyan háromszögre darabolnak, amelyek területe egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ezen négy egész szám szorzata négyzetszám.

Speciális matematika tantervű középiskolások

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex sokszög oldalainak száma 6-nál nagyobb, akkor legalább egy oldalán két tompaszög fekszik.

2. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege páros?

3. Van-e kettőnek olyan hatványa, amely mind a tíz számjegyből ugyanannyit tartalmaz?

4. Egy sakkversenyen kétszer annyi férfi vett részt, mint nő. Mindenki mindenkivel játszott pontosan egyszer. Döntetlen nem volt, és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint hét az öthöz. Hányan vettek részt a versenyen?

5. Egy konvex négyszöget átlói olyan háromszögre darabolnak, amelyek területe egész szám. Végződhet-e ezen négy egész szám szorzata 1992-re?

6. Az ABC háromszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy
$PAB\sphericalangle = 30^\circ$, $PAC\sphericalangle = 10^\circ$, $PCA\sphericalangle = 20^\circ$, továbbá $ABC\sphericalangle = 40^\circ$.
Mekkora a $BPC\sphericalangle$?

II. forduló
Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

Szakközépiskolások

1. Az A és B helységekből egyszerre indul egymással szembe két jármű. A találkozás után az A-ból induló t_1 óra múlva ér B-be, a B-ből induló t_2 óra múlva ér A-ba. Bizonyítsa be, hogy ha t a találkozásig eltelt idő, akkor $t^2 = t_1 \cdot t_2$. (Mindkét jármű egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez.)

2. Két egymást érintő, egyenlő sugarú kör érintési pontján át rajzoljunk egy ugyanolyan sugarú kört, tetszőleges középponttal. Bizonyítsa be, hogy ezt a kört az előző kettő (eltekintve az érintési ponttól) átellenes pontokban metszi.

3. Igazolja, hogy ha az x, y, és z valós számokra teljesül az alábbi egyenlőség, akkor közülük valamelyik kettő egyenlő egymással:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 0.$$

Általános tantervű osztályok

1. Igazolja, hogy ha az x, y, és z valós számokra teljesük az alábbi egyenlőség, akkor közülük valamelyik kettő egyenlő egymással:

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = 0.$$

2. Tizenhárom malac közül bármelyikre igaz, hogy testsúlya legfeljebb 1 kilóval tér el a többi 12 malac testsúlyának átlagától. Maximálisan hány kilóval térhet el két malac súlya egymástól?

3. Az ABC háromszögben a BC oldalhoz tartozó felezőmerőleges és a szögfelező metszéspontját jelölje O-val. Tekintse azt a kört, amelynek középpontja O, és érinti az AB egyenest E_1, illetve az AC egyenest E_2 pontban!
Igazolja, hogy $AE_1 + AE_2 = AB + AC$!

Speciális matematika tantervű osztályok

1. n malac közül bármelyikre igaz, hogy testsúlya legfeljebb 1 kilóval tér el a többi $n-1$ malac testsúlyának átlagától. Maximálisan hány kilóval térhet el két malac súlya egymástól?

2. Az egyenlő oldalú ABC háromszög belsejében a P pont úgy helyezkedik el, hogy $PA = 3$ cm, $PB = 4$ cm, és $PC = 5$ cm. Mekkora a háromszög oldala?

3. Hány fős társaság esetén állíthatjuk biztosan – a társaság tagjait nem ismerve – hogy vagy van köztük három olyan személy, akik közül bármely kettő ismeri egymást, vagy van köztük négy olyan, akik közül bármely kettő nem ismeri egymást? (Az ismeretségeket kölcsönösnek feltételezzük.)

II. forduló
Haladók (II. osztályosok)

Szakközépiskolások

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y}$$

egyenletnek nincs megoldása az egész számok körében.

2. Az ABC hegyesszögű háromszög M magasságpontjának az AB oldal egyenesére vonatkozó tükörképe M', a BC oldal egyenesére vonatkozó tükörképe M''. Bizonyítsuk be, hogy az $AM'BM''$ és az $M'ACM''$ négyszögek köré írt körök középpontja egybeesik.

3. Hány különböző konvex sokszög rakható ki hézagtalanul és átfedés nélkül 10^{100} darab egységnégyzet maradéktalan felhasználásával?

4. Mely pozitív x értékekre lesz a legnagyobb az

$$\frac{x-5}{x^2-5x+1992}$$

kifejezés értéke?

5. Egy 1 egység területű háromszögben kijelölünk egy P pontot. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\frac{1}{2}$-nél nagyobb területű konvex sokszög a háromszög belsejében, amelyik nem tartalmazza P-t.

Nem speciális matematika tantervű osztályok

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x-y}$$

egyenletnek nincs megoldása az egész számok körében.

2. Mely pozitív x értékre lesz a legnagyobb az

$$\frac{x-5}{x^2-5x+1992}$$

kifejezés értéke?

3. Egy 1 egység területű háromszögben kijelölünk egy P pontot. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\frac{1}{2}$-nél nagyobb területű konvex sokszög a háromszög belsejében, amelyik nem tartalmazza P-t.

4. Egy többfordulós körmérkőzésen $n \geq 3$ sakkozó indult. A verseny ott tart, hogy mindenki játszott mindenkivel legalább egyszer, és bármely két sakkozó különböző számú mérkőzést játszott le. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan sakkozó, akik már legalább háromszor játszottak egymással.

5. Az ABC hegyesszögű háromszög A csúcsából induló magasságának talppontja P, a B csúcsából induló magasságának talppontja Q. Mekkora a háromszög AB oldallal szemközti szöge, ha a PQ szakasz felezőpontjának és az AB oldal felelőpontjának távolsága $AB/4$?

Speciális matematika tantervű osztályok

1. Mely pozitív x értékre lesz a legnagyobb a

$$\frac{x-5}{x^2-5x+1992}$$

kifejezés értéke?

2. Egy 1 egység területű háromszögben kijelölünk egy P pontot. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $\frac{1}{2}$- nél nagyobb területű konvex sokszög a háromszög belsejében, amelyik nem tartalmazza P-t.

3. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n > 8$ páros szám előállítható három olyan egynél nagyobb egész szám összegeként, amelyek páronként relatív prímek.

4. A 8×8-as sakktáblára 2×2-es lapocskákat helyezünk átfedés nélkül úgy, hogy minden lapocska pontosan négy mezőt takar le. Nyolc lapocskát már elhelyeztünk. Bizonyítsuk be, hogy elfér még egy kilencedik is.

5. Egy r sugarú körbe írt szimmetrikus trapéz átlói merőlegesek egymásra. Mekkora a trapéz területe, ha a kör középpontja az átlók metszéspontjától $r/2$ távolságra van?

Döntő forduló
Haladók (II. osztályosok)

Szakközépiskolások

1. Egy kör alakú asztalnál három társaság tagjai ülnek. A különböző társaságba tartozó, egymás mellett ülő tagok mind kezet fognak és bemutatkoznak egymásnak. Bizonyítsuk be, hogy bármelyik két társaság tagjai összesen páros sokszor fognak kezet.

2. Bizonyítsuk be, hogy 1001 darab egymást követő egész szám 1993-adik hatványának összege nem lehet prímszám.

3. Egy trapéz középvonala és két átlója által bezárt háromszög területe a trapéz területének 1/36 része. Mekkora a trapéz párhuzamos oldalainak aránya?

Nem speciális matematika tantervű középiskolások versenye

1. Bizonyítsuk be, hogy 1001 darab egymást követő egész szám 1993-adik hatványának összege nem lehet prímszám.

2. Az ABC egyenlő szárú háromszöget tükrözzük az alapjához tartozó magasságának egy P pontjára. Mutassuk meg, hogy a két háromszög közös részének területe az eredeti területének legfeljebb 2/3-szorosa

3. Egy kör alakú asztal körül a $n\,(\geqslant 3)$ ember ül, mindegyik előtt egy-egy lefelé fordított kártyalap. Bármely három egymás mellett ülőt megkérhetünk, hogy fordítsák meg kártyájukat. Ezt a kérést akárhányszor megismételhetjük, így egy felfelé fordított kártya újra lefelé fordulhat. Milyen n érték esetén érhető el, hogy pontosan egy felfelé fordított kártya legyen az asztalon?

Speciális matematika tantervű középiskolások versenye

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely egész p paraméterhez legfeljebb egyetlen olyan valós x található, hogy a

$$\sqrt{p+\sqrt{p-\sqrt{p+\sqrt{p-x}}}}$$

kifejezés értéke pozitív egész szám legyen.

2. Egy 120°-os körcikkbe írt téglalap két csúcsa a köríven, kettő pedig a körcikket határoló sugarakon helyezkedik el. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap kerülete nem lehet nagyobb a körcikk területének $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$-szeresénél.

3. Egy társaságot nevezzünk „vegyesnek”, ha nincsen olyan ember közöttük, aki senkit sem ismer, és olyan sincsen, aki mindenkit ismer. Bizonyítsuk be, hogy bármely legalább négytagú vegyes társaságban van négy ember, akik önmagukban is vegyes társaságot alkotnak.