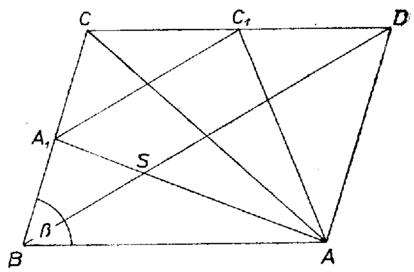
Ha valamely ABC háromszögben $AB > BC$, akkor a B csúcs az AC szakasz felező merőlegesének azon az oldalán van, ahol C. Itt van a háromszög B-hez tartozó súlyvonala, és rajta a háromszög S súlypontja is, tehát $AS > SC$, vagyis a háromszög A-beli s_a súlyvonala hosszabb a C-beli s_c-nél.

Válasszuk úgy a vizsgált háromszög betűzését, hogy az oldalak hosszára $a \leq b \leq c$ teljesüljön, ekkor $s_a \geq s_b \geq s_c$. Ha tehát a súlyvonalakból alkotott háromszög hasonló az eredetihez, akkor van olyan λ szám, hogy

(1) $$s_a = \lambda c, \qquad s_b = \lambda b, \qquad s_c = \lambda a.$$

Tükrözzük B-t az AC szakasz felezőpontjára, kapjuk D-t. Jelöljük a BC, CD szakaszok felezőpontját A_1-gye1, illetve C_1-gyel. Mivel $A_1C_1 = \frac{1}{2}BD = s_b$, $AC_1 = s_c$, az AA_1C_1 háromszög az, amit a súlyvonalakból szerkeszthetünk.



Ha ezt elhagyjuk az $ABCD$ paralelogrammából, a visszamaradó ABA_1 ADC_1 darabok területe az eredeti háromszög területének a felével, A_1CC_1 területe pedig a negyedével egyenlő. Ha tehát az eredeti háromszög T-vel, a súlyvonalakból alkotható háromszög területét t-vel jelöljük, akkor $2T = t + T + \frac{1}{4}T$, vagyis $4t = 3T$. Mivel (1) szerint $t = \lambda^2 T$,

(2) $$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Jelöljük az ABC háromszög B-nél levő szögét β-val, akkor $BCD\sphericalangle = 180^\circ - \beta$, és a cosinus-tétel alapján

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

(3) $$4s_b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta.$$

Adjuk össze ezt a két egyenletet, és $4s_b^2$ helyére (1) és (2) alapján írjunk $3b^2$-t kapjuk, hogy $4b^2 = 2a^2 + 2c^2$, azaz

(4) $$2b^2 = a^2 + c^2$$

amint azt bizonyítani akartuk.

Kramarics Géza (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A most bizonyított állítás meg is fordítható: ha egy háromszög oldalaira teljesül (4), akkor a súlyvonalakból szerkesztett háromszög hasonló az eredetihez. Azt, hogy (4)-ből $4s_b^2 = 3b^2$ következik, (3)-ból közvetlenül megkapjuk, a $4s_c^2 = 3a^2$, $4s_a^2 = 3c^2$ igazolásához pedig a (3)-hoz hasonlóan bizonyítható

$$4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2, \qquad 4s_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

összefüggéseket kell felhasználnunk. A megfordításhoz azonban (4) önmagában nem elég, előfordulhat ugyanis, hogy (4) teljesül, de nincs olyan háromszög, amelynek a, b, c volna az oldala, például $a = 1$, $b = 5$, $c = 7$ mellett.