IV. magyar–izraeli matematikaverseny

Az immár hagyományos magyar–izraeli matematikaverseny helyszíne idén, április 19. és 25. között, Budapest volt. (A verseny helyszíne felváltva Magyarország, ill. Izrael.) A magyar csapat vezetője idén is *Pelikán József* (Eötvös Loránd Tudományegyetem), az izraelié *Danny Raz* (Weizmann Intézet) volt. A magyar diákok neve az eredmények alábbi ismertetésénél olvasható. Köszönettel tartozunk *Reiman Istvánnak* (Budapesti Műszaki Egyetem), aki, a korábbi évekhez hasonlóan, idén is a diákok felkészítésének legnagyobb részét végezte.

Az egyéni verseny április 21-én került lebonyolításra, 4 óra alatt 4 feladatot kellett megoldani. Mindegyik feladat helyes megoldásával a Nemzetközi Diákolimpiához hasonlóan 7 pontot lehetett szerezni, az egy versenyző által elérhető maximális pontszám tehát 28 volt.

A magyar diákok eredményei:
Katz Sándor (Bonyhád, Petőfi Sándor Gimn., IV. o. t.) és
Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) 28 pontot ért el,
Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) 25 pontot,
Kálmán Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t,) pedig 14 pontot szerzett.

A magyar csapat összpontszáma: 95 pont.

Az izraeli csapatból **Omer Angel** 28, **Avishai Vanunu** 23, **Oren Nechushtan** 14, **Yuri Burde** pedig 10 pontot ért el.

Az izraeli csapat összpontszáma 75 volt.

(A feladatok szövegét alább közöljük.)

Április 22-én az e versenyen szokásos csapatversenyre került sor, előre megadott témából. Idén ez a téma „Véges csoportok” volt, ami már nem tartozik a szokásos középiskolai tananyagba, az egyetem (matematikus szak) első évében szokás tárgyalni. Éppen ezért mindkét csapatot vezetőik előzetesen felkészítették a témából, és megfelelő irodalmat és gyakorló feladatokat is kaptak. Az Olvasók közül azoknak, akik közelebbről meg akarnak ismerkedni az alább leírt 7 csoportelméleti feladattal, esetleg maguk is megpróbálkoznak a megoldásukkal, ajánlok néhány könyvet:

Fuchs László: Algebra (Egyetemi jegyzet). (Elég a „Csoportelmélet” fejezet első felét és az előtte lévő bevezető fejezetet elolvasni. A versenyzők is ezt használták.)

Fried Ervin: Absztrakt algebra elemi úton (Itt is elég a „Csoportelmélet” fejezet elolvasása.)

Gyapjas Ferenc: Csoportelmélet (Középiskolai Szakköri Füzet)

Bálintné-Czédli-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok (A „Csoportok” fejezet feladatai. Ez volt a versenyzők által használt másik könyv.)

A csapatversenyen az egyes csapatok 4 diákja közösen dolgozik, itt hagyományosan nem hirdetünk formális eredményt, csak ismertetjük az egyes csapatok teljesítményét. Idén az első öt feladat viszonylag könnyebbnek, a két utolsó nehezebbnek bizonyult.

Közelebbről: a magyar csapat megoldotta az 1., 2., 3. és 4. feladatot, és lényegében helyes az 5. feladatra adott megoldásuk is. Az izraeli csapat megoldotta a 2., 3., 4, és 5. feladatot, viszont az 1. feladatra adott megoldásuk hibás. A 6. feladatban mindkét csapat némi kezdeti próbálkozásig jutott, míg a 7. feladatban az izraeli csapat tett ugyan kísérletet a megoldásra, de sikertelenül.

Az izraeli csapat számára kedden, pénteken és vasárnap is szerveztünk városnézést, ill. (hajóval, vonattal és autóbusszal) kirándulásokat. Ebben nagy segítséget nyújtott Rácz András (ELTE) (héber nyelvű) idegenvezetésével.

A szombat esti záróbankettre és eredményhirdetésre a magyar diákok szüleit is meghívtuk. Ennek megszervezéséért, ill. a versenyhelyiségek biztosításáért köszönet illeti *Lippner Györgyöt*, a Lauder Javne iskola igazgatóját.

Pelikán József

Az egyéni verseny feladatai (1. nap)

1. *Legyenek a,b relatív prím pozitív egészek. Tegyük fel, hogy*

$$\frac{a}{b} = b,a$$

ahol a jobb oldalon álló szám egész része b és tizedestört-része a.

Határozzuk meg az összes ilyen a,b-t.

2. *Határozzuk meg az összes olyan valós együtthatós $f(x)$ polinomot, amelyre azonosan teljesül:*

$$f(x^2-2x) \equiv (f(x-2))^2.$$

3. *Az egységsugarú H félkör kerületén az A,B,C,D,E pontok ebben a sorrendben következnek.*
Bizonyítsuk be:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DE^2+AB\cdot BC\cdot CD+BC\cdot CD\cdot DE<4.$$

4. *A $(3n)\times(3n)$-es sakktáblán bástyákat kívánunk elhelyezni oly módon, hogy mindegyik bástyát legfeljebb egy másik bástya üsse.*

Mennyi az ily módon elhelyezhető bástyák maximális száma?

A csapatverseny feladatai (2. nap)

1. *Legyen $k(\geqslant 2)$ olyan, hogy minden $x, y \in G$-re és $i = k-1,\ k,\ k+1$ mindegyikére teljesül*

$$(xy)^i = x^i y^i.$$

Bizonyítsuk be, hogy G Abel-csoport.

2. *Tegyük fel, hogy $n \geqslant 1$ olyan, hogy az $x \mapsto x^n$ $(x \in G)$ leképezés G-nek önmagára való izomorfizmusa. Bizonyítsuk be, hogy minden $a \in G$-re: $a^{n-1} \in Z(G)$.*

3. *Bizonyítsuk be, hogy S_n minden eleme felírható 2 ciklus szorzataként.*

4. *Legyen $H \leqslant G$, $a, b \in G$. Bizonyítsuk be, hogy $|aH \cap Hb|$ vagy nulla, vagy osztója $|H|$-nak.*

5. *Legyen $H \leqslant G$, $|H| = 3$. Mit mondhatunk $|N_G(H) : C_G(H)|$-ról?*

6. *Legyen $a, b \in G$. Tegyük fel, hogy*

$$ab^2 = b^3 a, \qquad ba^2 = a^3 b.$$

Bizonyítsuk be, hogy $a = b = 1$.

7. *Legyen $|G'| = 2$. Bizonyítsuk be, hogy $|G : G'|$ páros.*

Jelölések

G :	*egy véges csoport*	G' :	*G kommutátorrészcsoportja*
$H \leqslant G$:	*H részcsoportja G-nek*	$N_G(H)$:	*H normalizátora G-ben*
|G:H| :	*a H részcsoport indexe G-ben*	$C_G(H)$:	*H centralizátora G-ben*
|X| :	*az $X \subseteq G$ részhalmaz elemszáma*	S_n :	*az n-edfokú szimmetrikus csoport*
$Z(G)$:	*G centruma*		