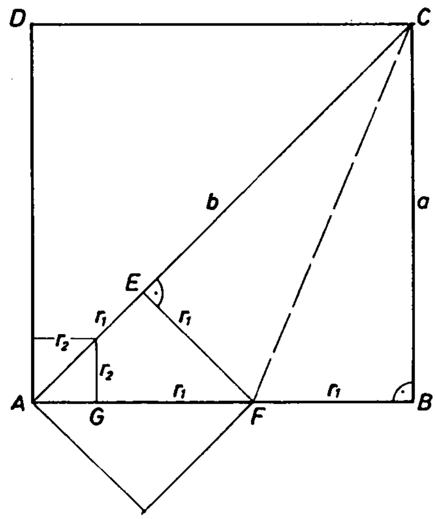
1. Geometriai megközelítés

Az irracionális szám a pitagoreusok felfedezése. A problémához geometriai úton jutottak el. Egy szakasz mérőszámának megállapítására bármely nála nem nagyobb hosszegység választható, amely valahányszor ráfér maradék nélkül. Kérdés, hogy bármely két szakaszhoz létezik-e olyan hosszegység, amellyel mindkettő mérhető.

Két szakasz esetén egy közös mértéket úgy kaphatunk meg, hogy a kisebb szakaszt felmérjük a nagyobb szakaszra, és ha a kisebb szakasz többszöröse maradék nélkül rámérhető a nagyobb szakaszra, akkor ez egy közös mérték, ha nem, akkor a maradékot felmérjük a kisebb szakaszra – hasonlóan, mint előbb. Az eljárást tovább folytatva az utolsó nem nulla maradék lesz egy közös mérték. Előfordulhat azonban, hogy az előző eljárás soha nem ér véget. Ekkor a görögök azt mondták, hogy a két szakasz összemérhetetlen. Ha a két szakasz közül az egyiknek van mérőszáma, akkor a másiké arrheton (kimondhatatlan) szám; irracionális szám. A négyzet oldala és átlója ilyen, összemérhetetlen.



Legyen a négyzet oldala a, a négyzet átlója b. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy $b < 2a$, továbbá látható, hogy $b > a$. Tehát

(1) $$b = a + r_1.$$

Állítsunk merőlegest az átlóra E-ben, ahol $\overline{EC} = a$. Az $EFC\triangle$ és az $FBC\triangle$ egybevágóak – két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög megegyezik. Így $\overline{EF} = \overline{FB}$. Az $EFA\sphericalangle$ 45°-os, ebből következik, hogy $r_1 = \overline{EF} = \overline{FB}$. Most mérjük fel r_1-et $\overline{AF}$-re F-ből. Ezzel a négyzet oldalát az átlójára mérjük fel. Az *ábráról* jól látható, hogy

(2) $$a = 2r_1 + r_2.$$

Ha az eljárást folytatjuk – G-ben állítva merőlegest, azt tapasztaljuk, hogy következő lépésként ismét egy négyzet oldalát mérjük fel átlójára. Az eljárás ezért soha nem ér véget.

Az is jól látható, hogy a lépések ismétlődnek, így

(3) $$r_1 = 2r_2 + r_3,$$

általánosan

$$r_n = 2r_{n+1} + r_{n+2}.$$

Azt tudjuk, hogy a maradékok – (r_i) – szigorúan monoton csökkenő sorozatot alkotnak, ez az algoritmus következménye. Az is könnyen belátható, hogy a maradékok lassan „elfogynak”, a maradékokból álló (r_i) sorozat határértéke nulla. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy az (r_i) sorozatnak végtelen sok eleme nagyobb, mint ε_0. Azt tudjuk, hogy $b = a + r_1 = a + 2r_2 + r_3 = a + 2r_2 + 2r_4 + r_5$, és az eljárást folytatva b felírható a páros indexű maradékok segítségével:

$$b = a + 2(r_2 + r_4 + r_6 + \ldots + r_{2i} + \ldots).$$

Hasonlóan $b = r_1 + 2(r_1 + r_3 + \ldots + r_{2i+1} + \ldots)$ a páratlan indexű maradékokkal. Összeadva e két összefüggést kapjuk, hogy $2b = a + r_1 + 2(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots)$, ebből pedig következik, hogy $2b > 2(r_1 + r_2 + r_3 + \ldots)$, azaz $b > \sum_{i=1}^{\infty} r_i$.
Mivel végtelen sok ε_0-nál nagyobb maradék van, ezért $\left(\left[\frac{b}{\varepsilon_0}\right] + 1\right) = n$ darab ε_0-nál nagyobb maradék is van.

Tehát

$$b > \sum_{i=1}^{\infty} r_i > \sum_{\substack{k=1 \\ r_{1k} > \varepsilon_0 > 0}}^{n} r_{1k} > \left(\frac{b}{\varepsilon_0} + 1\right)\varepsilon_0 > b.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát a maradékokból álló sorozat nullához tart.

Vegyük észre, hogy ha fel tudnánk b-t a és r törtrészei segítségével írni úgy, hogy az összeg a maradékok közül egy lehetőleg minél kisebb tagot tartalmazzon, akkor $a = 1$ (egységnyi hosszúságú szakasz) választása esetén $b = \sqrt{2}$ értékét tetszőleges pontossággal meghatározhatnánk.

A (2) összefüggésből $r_1 = \frac{a}{2} - \frac{r_2}{2}$, ezt visszaírva (1)-be $b = a + \frac{a}{2} - \frac{r_2}{2}$ adódik. (3)-ból $\frac{r_1 - r_3}{2} = r_2$, és mivel $r_1 = \frac{a - r_2}{2}$, így $\frac{\frac{a - r_2}{2} - r_3}{2} = r_2$, azaz $\frac{a - 2r_3}{5} = r_2$. Ha ezt beírjuk a b-re kapott utolsó egyenletbe, $b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{r_5}{5}$ adódik. Mivel $\frac{r_2 - r_4}{2} = r_3$, így $\frac{\frac{a - 2r_3}{5} - r_4}{2} = r_3$, tehát $\frac{a - 5r_4}{12} = r_3$. Ezt visszaírva a b-re kapott utolsó egyenletbe, kapjuk:

$$b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{r_4}{12}.$$

Hasonlóan kapjuk: $b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{a}{348} + \frac{r_5}{29}$.

$a = 1$ esetén $b = \sqrt{2} \approx 1{,}41437$ adódik az előző összefüggésből.

Az eljárást folytatva $b = a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{a}{348} + \frac{a}{2030} - \frac{r_6}{70}$ adódik, és $a = 1$ esetén $b = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$.

Legyen $b(1) = a + \frac{r_1}{c_1}$ az összeg első, $b(2) = a + \frac{a}{c_1 c_2} - \frac{r_2}{c_2}$ a második alakja. Legyen $c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 5,\ \ldots,\ c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ ($i > 1$ esetén). Azt állítjuk, hogy – minden n-re – b

(4) $$a + \frac{a}{c_1 c_2} - \frac{a}{c_2 c_3} + \ldots + (-1)^n \frac{a}{c_{n-1} c_n} + (-1)^{n+1} \frac{r_n}{c_n}$$

alakban írható.

Először belátjuk, hogy $r_i = \frac{a - c_i r_{i+1}}{c_{i+1}}$.

Bizonyítás teljes indukcióval:

$$i = 1 \text{ esetén } r_1 = \frac{a - r_2}{2}, \quad i = 2 \text{ esetén } r_2 = \frac{a - 2r_3}{5}.$$

Tegyük föl, hogy n-re teljesül, hogy $r_n = \frac{a - c_n r_{n+1}}{c_{n+1}}$. Ezt az $r_{n+1} = \frac{r_n - r_{n+2}}{2}$ összefüggésbe beírva

$$\frac{a - c_n r_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{c_{n+1}}{c_{n+1}} r_{n+2} = 2r_{n+1}$$

adódik, amit rendezve a kívánt

$$\frac{a - c_{n+1} r_{n+2}}{c_{n+2}} = r_{n+1}$$

alakra hozhatunk $c_{n+2} = 2c_{n+1} + c_n$ felhasználásával.

Visszatérve (4)-re, azt is teljes indukcióval bizonyítjuk:

$n = 1$-re $b = a + \frac{r_1}{c_1} = a + r_1$; $n = 2$-re $b = a + \frac{a}{c_1 c_2} - \frac{r_2}{c_2} = a + \frac{a}{2} - \frac{r_2}{2}$.

Tegyük föl, hogy valamilyen n-re $b = a + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{r_n}{c_n}$; ekkor

$$b = a + \ldots + (-1)^{n+1} \left(\frac{a - c_n r_{n+1}}{c_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{c_n} =$$
$$= a + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{a}{c_n \cdot c_{n+1}} + (-1)^{n+2} \frac{r_{n+1}}{c_{n+1}}.$$

Mivel a maradékokból álló sorozat nullához tart, ezért

$$\lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{1}{c_1c_2}-\frac{1}{c_2c_3}+\ldots+(-1)^i\frac{1}{c_{i-1}c_i}\right)=\sqrt{2}.$$

Az előző összeg segítségével:

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}+\frac{1}{60}-\frac{1}{348}+\frac{1}{2030}+\ldots$$

2. A $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ rekurzió

A (c_i) sorozat elemeit a $c_i = c_{i-2} + 2c_{i-1}$ rekurziós formula adja meg, ha $i > 2$, c_1 és c_2 pedig legyen 0, illetve 1. A Fibonacci-számokhoz hasonlóan lehetőség van a sorozat elemeit explicite is megadni, azaz i ismeretében a c_i-t meghatározni.

1. módszer: A sorozat elemeit két mértani sorozat összegeként írjuk fel. Olyan mértani sorozatokat tekintünk, amelyek maguk is kielégítik a $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ rekurziót.

Legyen $c_i = q^i,\ q \neq 0$. Ekkor $q^i = 2q^{i-1} + q^{i-2}$ minden $i \geqslant 2$ esetén, ami
q^{i-2}-vel való osztás miatt ekvivalens a $q^2 = 1 + 2q$ feltétellel.
$q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ kielégítik az utóbbi egyenletet.

Legyen $S_1 = (1, q_1, q_1^2, q_1^3, \ldots)$ és $S_2 = (1, q_2, q_2^2, q_2^3, \ldots)$. A sorozatunkat $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ alakban keressük:

$$(0,1,2,5,\ldots) = \lambda_1(1,q_1,q_1^2,q_1^3,\ldots) + \lambda_2(1,q_2,q_2^2,q_2^3,\ldots).$$

Az egyenlőség teljesüléséhez szükséges és elégséges az első 2 tag egyenlősége, hiszen mindkét oldal kielégíti a $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ rekurziót. Azaz $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ és $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 = 1$-nek teljesülnie kell.

Az egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ adódik. Így

$$(0,1,2,5,\ldots) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1, 1+\sqrt{2}, (1+\sqrt{2})^2, (1+\sqrt{2})^3, \ldots\right) - \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1-\sqrt{2}, (1-\sqrt{2})^2, (1-\sqrt{2})^3, \ldots),$$

vagyis

$$c_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right).$$

2. módszer: Tekintsük az $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ ún. hatványsort. Ez „elég kis” x értékekre konvergens, és belátható, hogy hasonlóan számolhatunk vele, mint véges összegekkel. A $c_i = 2c_{i-1} + c_{i-2}$ tulajdonság felhasználásával tekintsük $(x^2 + 2x - 1) \cdot F(x)$-et:

$$(-)\qquad F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$$(+)\qquad 2x \cdot F(x) = 2\sum_{i=1}^{\infty} c_{i-1} x^i$$

$$(+)\qquad x^2 \cdot F(x) = \sum_{i=2}^{\infty} c_{i-2} x^i$$

Innen

$$\sum_{i=2}^{\infty}\underbrace{(-c_i + 2c_{i-1} + c_{i-2})}_{0}x^i + \underbrace{2c_0x}_{0} - \underbrace{c_0}_{0} - \underbrace{c_1x}_{-x} = (2x + x^2 - 1)F(x).$$

Az előző összefüggésből

$$F(x) = \frac{-x}{x^2+2x-1} = -x\left(\frac{1}{(x-(-1-\sqrt{2}))\cdot(x-(-1+\sqrt{2}))}\right).$$

Az $\dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ tört ún. parciális törtekre bontással felírható

$$\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

alakban, ahol A és B értékét közös nevezőre hozás után a megfelelő együtthatók összehasonlításával kaphatjuk meg. Ezt végigszámolva

$$F(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x}{x-(-1-\sqrt{2})}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x}{x-(-1+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x-\frac{1}{2\sqrt{2}}(-1-\sqrt{2})+\frac{1}{2\sqrt{2}}(-1-\sqrt{2})}{x-(-1-\sqrt{2})}+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x-\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-1+\sqrt{2})+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-1+\sqrt{2})}{x-(-1+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-(-1-\sqrt{2}))+\frac{1}{2\sqrt{2}}(-1-\sqrt{2})}{x-(-1-\sqrt{2})}+$$

$$+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-(-1+\sqrt{2}))+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-1+\sqrt{2})}{x-(-1+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot(-1-\sqrt{2})\cdot\frac{1}{x-(-1-\sqrt{2})}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot(-1+\sqrt{2})\cdot\frac{1}{x-(-1+\sqrt{2})}.$$

Végül $\frac{1}{x-\alpha}$ végtelen mértani sorba fejthető:

$$\frac{1}{x-\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha}}=(-1)(\alpha^{-1})\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{\alpha^i}.$$

Így

$$F(x)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}(1-\sqrt{2})^i\cdot x^i+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}(1+\sqrt{2})^i\cdot x^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(1+\sqrt{2})^i-(1-\sqrt{2})^i}{2\sqrt{2}}\right)\cdot x^i,\quad \text{vagyis}\quad c_i=\frac{(1+\sqrt{2})^i-(1-\sqrt{2})^i}{2\sqrt{2}}.$$

3. Lánctörtek

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots\,\cfrac{1}{a_N}}}}}$$

A fenti kifejezést véges lánctörtnek nevezzük. Az a_i-k tetszőleges valós számok lehetnek. Általánosabb tárgyalás esetén a „számlálókban” az 1-esek helyett más valós számok is állhatnak, azonban itt ezekkel az esetekkel nem foglalkozunk.

A fenti lánctörtet rövidebben $[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_N]$-nel fogjuk jelölni.

Legyen $p_0=a_0,\ p_1=a_1a_0+1,\ p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$, ha $n>1$;
$q_0=1,\ q_1=a_1$ és $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$, ha $n>1$.

Tudjuk, hogy $[a_0]=\frac{a_0}{1}$; $[a_0,a_1]=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_1a_0+1}{a_1}$ és teljes indukcióval könnyen belátható, hogy $[a_0,a_1,\ldots,a_n]=\frac{p_n}{q_n}$.

A következő állításunk az, hogy $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}$. Mivel

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \underbrace{(a_n p_{n-1} + p_{n-2})}_{p_n} q_{n-1} - p_{n-1} \underbrace{(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}_{q_n} =$$
$$= -(p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}).$$

A következő lépésben p_{n-1} és q_{n-1}-et beírva, és a behelyettesítéseket tovább folytatva kapjuk a fenti összefüggést. Az előző állításnak közvetlen következménye, hogy

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n},$$

azaz $[a_0, a_1, \ldots, a_n] - [a_0, \ldots, a_{n-1}] = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n}$; ebből viszont következik, hogy az $[a_0, \ldots, a_N]$ lánctört értékét $a_0 + \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{q_{n-1} q_n}$ alakban írhatjuk fel. Ami nem más, mint az 1. részben a $\sqrt{2}$-re felírt közelítő összegek általános alakja az utolsó – ismeretlen, egyre csökkenő maradék tagot tartalmazó – tag nélkül, $a_0 = 1,\ a_n = 2$ ($n > 0$ esetén), és $q_i = c_{i+1}$-et írva a fenti összefüggésbe. Ez azt jelenti, hogy $\sqrt{2}$ közelítő értékét egyszerűen felírhatjuk $[1, 2, 2, \ldots, 2]$ lánctörtként, s minél tovább folytatjuk a felírást, annál pontosabb értéket kapunk $\sqrt{2}$-re. Azt is mondhatjuk, hogy az

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

végtelen periodikus lánctört értéke $\sqrt{2}$.

Közvetlenül is bizonyíthatjuk, hogy az $[1, 2, 2, 2, \ldots]$ végtelen lánctört értéke $\sqrt{2}$, azaz $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$, ahol $x_n = [a_0, \ldots, a_n]$, esetünkben $a_0 = 1,\ a_n = 2$ (minden $n > 0$-ra). A 2. részben vázolt módszerek egyikével felírhatjuk p_n és q_n explicit alakját. Mivel

$$[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}, \qquad \text{ahol} \qquad p_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}$$

és

$$q_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}},$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2} \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}.$$

$|(1+\sqrt{2})| < 1$, ezért $\lim_{n\to\infty} (1+\sqrt{2})^n = 0$, ebből viszont következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$. p_n és q_n értékeinek pontos meghatározása után $\sqrt{2}$ értékére racionális közelítéseket kapunk, váltakozva alulról és felülről.

$p_0 = 1$	$q_0 = 1$	$\dfrac{p_0}{q_0} = 1 = 1$
$p_1 = 3$	$q_1 = 2$	$\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$
$p_2 = 7$	$q_2 = 5$	$\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{7}{5} = 1{,}4$
$p_3 = 17$	$q_3 = 12$	$\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{17}{12} \approx 1{,}416$
$p_4 = 41$	$q_4 = 29$	$\dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{41}{29} \approx 1{,}413$

Egy másik végtelen és periodikus lánctört az $[1, 1, 1, \ldots]$. Egyszerűen kapjuk, hogy $\dfrac{p_i}{q_i} = \dfrac{f_{i+2}}{f_{i+1}}$, ahol f_i a Fibonacci sorozat $(i+1)$-edik eleme ($f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_i = f_{i-1} + f_{i-2},\ \forall\ i > 1$). Ha p_i-t és q_i-t explicite felírjuk a 2. részben vázolt módszerek egyikével, azt kapjuk meg, hogy $\lim_{i\to\infty} \dfrac{p_i}{q_i} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ami nem más, mint az aranymetszés arányszáma: ha egy $a + b$ hosszúságú szakaszra

$(a+b) : b = b : a$, akkor $b : a = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Néhány további irracionális szám lánctörtalakja:

$$\pi = [3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1, \ldots]$$
$$e = [2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1, \ldots]$$
$$\sqrt{3} = [1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1, \ldots]$$

A fenti példákban szereplő, és $\sqrt{2}$-re, ill. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$-re kapott végtelen lánctörteket is *egyszerű* lánctörteknek nevezzük, mivel a lánctört alakokban szereplő a_i-k egész számok. Bizonyítható, hogy minden valós számnak létezik egyszerű lánctört alakja, és pontosan akkor racionális egy szám, ha az egyszerű lánctört-alakja véges, ill. pontosan akkor irracionális, ha egyszerű lánctört-alakja végtelen.

Az euklideszi algoritmushoz hasonló lánctört algoritmus segítségével elvileg bármely valós számnak felírhatjuk az egyszerű lánctört alakját. Legyen x valós szám, és legyen $a_0 = [x]$ (x egész része). Így $x = a_0 + \xi_0, \quad ahol \quad 0 \leqslant \xi_0 < 1$. Ha $\xi_0 \neq 0$, akkor legyen $\dfrac{1}{\xi_0} = a_1',\ [a_1'] = a_1 \geqslant 1$. Így $a_1' = a_1 + \xi_1$, ahol $0 \leq \xi_1 < 1$. Az algoritmust folytatva: $a_n' = \dfrac{1}{\xi_{n-1}}$ és

$$x = [a_0, a_1'] = \left[a_0, a_1 + \frac{1}{a_2'}\right] = [a_0, a_1, a_2'] = [a_0, a_1, a_2, a_3'] = \ldots\ .$$

Például:

$$\frac{3}{7} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{3}} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} = [0, 2, 3].$$

Noha $\sqrt{2}$ végtelen nem szakaszos tizedes tört, egyszerű lánctört-alakja mégis azt mutatja, hogy van benne harmónia. Már a XVIII. században megmutatták, hogy a lánctört kifejtésben a periodikusság az $a+\sqrt{b}$ alakú irracionális számokat jellemzi, ahol a és b racionális. (Ilyen tehát pl. $\sqrt{3}$ és $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ lánctört-alakja is.)