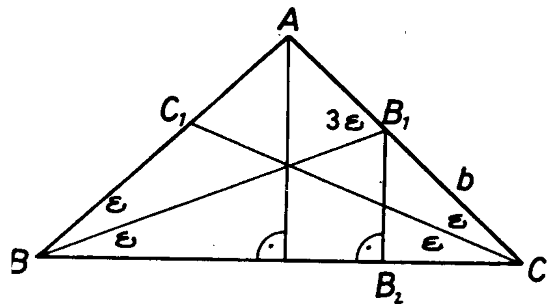
Feladat. *Szerkeszthető-e a háromszög, ha a szögfelező szakaszainak hossza*
a) 1, 2, 2 *egység?*
b) 1, 3, 3 *egység?*

Szemléletesen nyilvánvaló, hogy ha a háromszög két szögfelező szakasza egyenlő, akkor a háromszög egyenlő szárú. Ennek első bizonyítása Steinertől származik, ezért a szakirodalomban *Lehmus –Steiner*-tételként szerepel. (Részletesebben l. például: *Coxeter–Greitzer:* Az újra felfedezett geometria, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1977. 33–36. o.)[1]



1. ábra

a) Tegyük fel, hogy szerkeszthető a kívánt ABC háromszög, akkor a Lehmus – Steiner-tétel értelmében a háromszög egyenlő szárú, és a magassága 1 egység. Jelölje az alapot BC, a szárakat b, az alapon nyugvó szögeket 2ε, $BB_1 = CC_1 = 2$ egység (*1. ábra*). A külső szög tétel értelmében $AB_1B\sphericalangle = 3\varepsilon$, továbbá, $BAC\sphericalangle = \pi - 4\varepsilon$. A derékszögű háromszögből

$$b \sin 2\varepsilon = 1. \tag{1}$$

Az ABB_1 háromszögben a szinusztételből

$$\frac{2}{b} = \frac{\sin 4\varepsilon}{\sin 3\varepsilon}.$$

(1)-ből a b-t behelyettesítve, a megszerkeszthető, 0 és $\pi/4$ közé eső ε kielégíti a

$$2 \sin 2\varepsilon \sin 3\varepsilon = \sin 4\varepsilon.$$

egyenletet. Ezzel ekvivalensek a következő állítások:

$$\begin{aligned}
&\sin 3\varepsilon = \cos 2\varepsilon \\
&\sin 3\varepsilon = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon\right) \\
&3\varepsilon = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon + 2\pi k \qquad \text{vagy} \qquad 3\varepsilon + \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon = \pi + 2\pi l \qquad k, l \in \mathbf{Z} \\
&\varepsilon = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k \qquad \text{vagy} \qquad \varepsilon = \frac{\pi}{2} + 2\pi l.
\end{aligned}$$

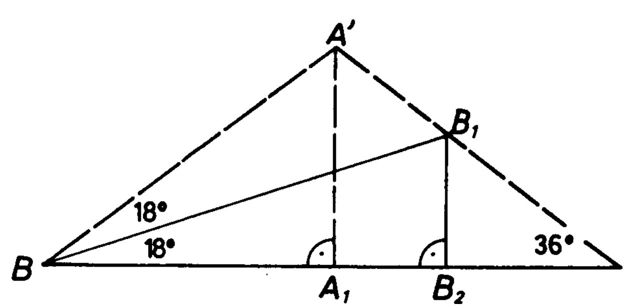
$0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{4}$ miatt az egyetlen megoldás $\varepsilon = \dfrac{\pi}{10}$.

Beláttuk tehát:

I. Ha szerkeszthető az $1, 2, 2$, szögfelező szakaszokat tartalmazó háromszög, akkor szerkeszthető a BB_1B_2 derékszögű háromszög, amelynek átfogója $BB_1 = 2$, és amelyben $B_1BB_2\sphericalangle = \varepsilon = 18°$.

Kimutatjuk, hogy ennek megfordítása is igaz:

II. Ha szerkeszthető a BB_1B_2 derékszögű háromszög, amelynek átfogója $BB_1 = 2$, és $\varepsilon = 18°$, akkor szerkeszthető az $1, 2, 2$ szögfelező szakaszokat tartalmazó háromszög is.



2. ábra

[1]Ugyanakkor megjegyzendő, hogy két külső szögfelező szakasz egyenlőségéből általában nem következik, hogy a háromszög egyenlő szárú. Szerk.

Tegyük fel, hogy szerkeszthető a mondott BB_1B_2 derékszögű háromszög, akkor tükrözzük a BB_2 félegyenest a BB_1-re, majd szerkesszünk a B_1-en átmenő, a BB_2-vel $36°$-os szöget bezáró – BA'-vel nem párhuzamos –egyenest (l. a *2. ábra* jelöléseit). Ily módon előáll az $A'BC'$ egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárakhoz tartozó szögfelezőszakaszok 2 egység hosszúak. Kérdés: a háromszög m magassága 1 egység-e? A szögfüggvények egyszerű alkalmazásával

$$BC' = BB_2 + B_2C' = 2\cos 18° + \frac{2\sin 18°}{\operatorname{tg}\, 36°},$$

$$BA_1 = \frac{1}{2}BC',$$

(2) $$m = BA_1 \operatorname{tg}\, 36° = \operatorname{tg}\, 36° \cos 18° + \sin 18°.$$

A $18°$ és $36°$ szögfüggvényeinek pontos értékét egyszerűen meghatározhatjuk:

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad \operatorname{tg}\, 36° = \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

ezeket (2)-be helyettesítve m-re tényleg 1-et kapunk.

Ezzel beláttuk, hogy a II. állítás is igaz. Közismert, hogy a $18°$-os szög megszekeszthető, tehát a II. előtagja igaz. Ebből következően a II. utótagja is igaz, azaz a feladat kérdésére igenlő a válasz.

b) Az a) alatti megoldás gondolatmenete az ABC egyenlő szárú háromszög alapszögét 2φ-vel jelölve a $\sin 3\varepsilon = \cos 2\varepsilon$ helyett a

$$3\sin 3\varphi = 2\cos 2\varphi$$

egyenletre vezet. Ennek egyszerű megoldására alig számíthatunk. Alkalmazzuk $\sin 3\varphi$-re az addíciós tételeket, majd olyan lépések kínálkoznak, amelyek során a φ-nek csak a szinusza marad meg:

$$\cos 2\varphi(3\sin\varphi - 2) + 3\cos\varphi \sin 2\varphi = 0,$$

(3) $$12\sin^3\varphi - 4\sin^2\varphi - 9\sin\varphi + 2 = 0.$$

Eddigi eredményünk: ha szerkeszthető az $1, 3, 3$ szögfelező szakaszokat tartalmazó háromszög, akkor az egyenlő szárú, továbbá alapszöge felének szinusza szerkeszthető, és gyöke a

(4) $$12x^3 - 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

egész együtthatós harmadfokú egyenletnek.

Keressük meg a (4) racionális gyökeit!

Tegyük fel, hogy p/q ($p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}^+$) megoldása a (4)-nek, akkor az ismert tétel szerint $p|2, q|12$. Ebből az adódik, hogy p/q csak a következő 16 racionális szám valamelyike lehet: $1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/6,\ 1/12,\ 2,\ 2/3$, valamint ezek ellentettjei. A (4) bal oldala által meghatározott f polinomfüggvény deriváltja két szélsőértékhelyet szolgáltat: $-0{,}40109$; $0{,}62331$. Ezeket, továbbá az $f(-1) < 0,\ f(-1/2) > 0,\ f(0) > 0,\ f(1/2) < 0,\ f(1) > 0$ megállapításokat felhasználva felvázolhatjuk f grafikonját és a folytonos függvényekre vonatkozó tételek alapján három intervallumot kaphatunk a (4) gyökeire:

$$\left(-1; -\frac{1}{2}\right), \quad \left(0; \frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

A 16 lehetséges racionális gyök közül a következők esnek ezekbe az intervallumokba:

$$-2/3; \quad 1/3; \quad 1/4; \quad 1/6; \quad 1/12; \quad 2/3.$$

Behelyettesítve őket, egyik sem bizonyul gyöknek, és a gyökökre ezeket a szűkebb intervallumokat kapjuk:

(5) $$\left(-1; -\frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right), \quad \left(\frac{2}{3}; 1\right).$$

A szerkeszthetőség elméletének egyik ismert tétele azt mondja, hogy ha a racionális együtthatós harmadfokú egyenletnek nincs racionális gyöke, akkor az egyenlet egyik gyöke sem szerkeszthető meg (l. KöMal 1985. évi 8–9. szám, 337–341. o.).

Gondolatmenetünk szerint $\sin\varphi$ gyöke a (4) egyenletnek, amelynek nincs racionális gyöke, ezért $\sin\varphi$ nem szerkeszthető meg. Ez ellentmond annak a megállapításunknak, hogy $\sin\varphi$ szerkeszthető, feltéve, hogy a kívánt háromszög szerkeszthető.

A feladat kérdésére tehát nemleges választ kaptunk.

Megjegyzés: A (4) egyenletet kielégítő $\sin\varphi$-re a $0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$ korlátozás mellett az (5) alatti második és harmadik intervallum egyaránt szóba jöhet, de a 2/3 és 1 közti szinusz érték 41°-nál nagyobb szöget ad φ-re. Az ebből nyerhető 82°, 82°, 16° szögű vagy még „laposabb" háromszög nyilvánvalóan nem lehet megoldás. A feltételeknek egyetlen háromszög felel meg: a $\sin\varphi$ $(1/6;1/3)$ intervallumbeli értékéből adódóan a durván 9° és 15° közé esik, de a (4)-re alkalmazott közelítő módszerekkel tetszőleges pontosság elérhető.