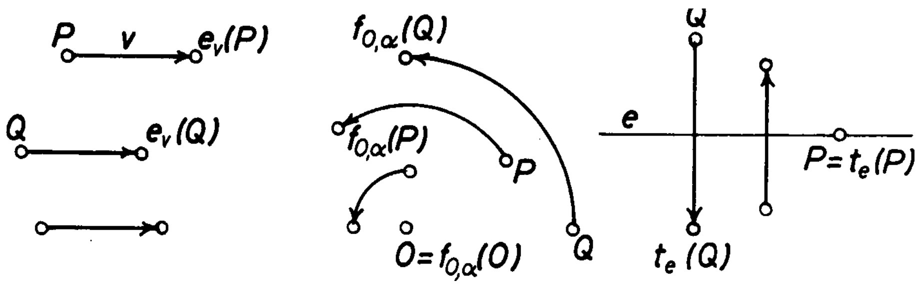
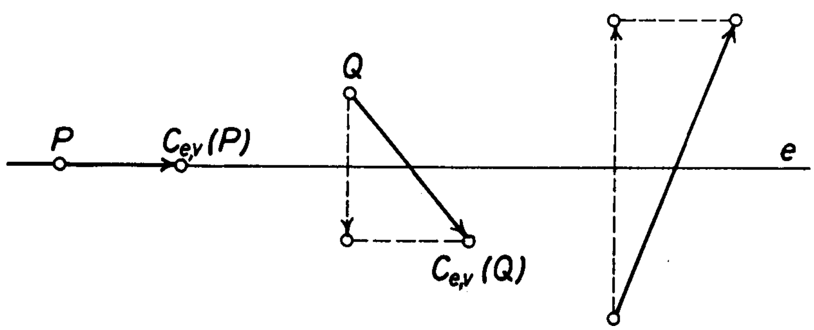
A sík egybevágóságaival fogunk foglalkozni. Ezek közé tartoznak az eltolások, a forgatások, a tengelyes tükrözések. A sík egy egybevágósági transzformációján egy olyan f leképezést (függvényt) értünk, amelynek értelmezési tartománya a sík pontjainak halmaza, és értékkészlete is ugyanezen sík pontjainak halmaza, továbbá tetszőleges P, Q pontpárra $f(P)$ és $f(Q)$ távolsága megegyezik P és Q távolságával. Hangsúlyozom, hogy egy egybevágósági transzformáció meghatározásához csak arra van szükség, hogy minden pontnak megadjuk a képét; azt az utat, ahogyan P-ből $f(P)$-be jutunk, csak a leképezés szemléltetéséhez használjuk. Az ismert egybevágósági transzformációkat a következőképpen fogjuk jelölni: a $\mathbf{v}$ vektorral való eltolást $e_{\mathbf{v}}$-vel, az O pont körüli α szögű irányított forgatást, $f_{O,\alpha}$-val, az e egyenesre való tükrözést t_e-vel.



1. ábra

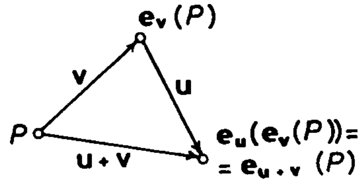
Az egybevágóságok közé számítjuk a helybenhagyást (identikus függvényt), amelyre $i(P) = P$, minden P pontra. Meg kell említenünk az egybevágósági transzformációknak még egy, kevésbé ismert fajtáját. Ez az úgynevezett *csúsztatva tükrözés.* Legyen e egy egyenes, $\mathbf{v}$ pedig egy e-ben fekvő vektor. Ekkor a $c_{e,\mathbf{v}}$-vel jelölt transzformáció egy P ponthoz az e-re vonatkozó tükörképének $\mathbf{v}$-vel való eltoltját rendeli hozzá (*2. ábra*).



2. ábra

Ahogyan a tengelyes tükrözést szokás úgy szemléltetni, hogy az tulajdonképpen az e tengely körüli 180°-os térbeli forgatás, a csúsztatva tükrözést is elképzelhetjük úgy, hogy az egy csavarmenetes tengely körüli térbeli forgatást jelent: miközben végrehajtjuk a 180°-os forgatást, a tengely $\mathbf{v}$-vel előrehalad.

Minden egybevágósági transzformációnak van *inverze*, azaz olyan egybevágósági transzformáció, ami $f(P)$-hez P-t rendeli hozzá. Ezt a transzformációt f^{-1}-gyel jelöljük. Világos, hogy $e_{\mathbf{v}}$ inverze a $-\mathbf{v}$ vektorral való eltolás, tehát $e_{\mathbf{v}}^{-1} = e_{-\mathbf{v}}$ továbbá $f_{O,\alpha}^{-1} = f_{O,360^\circ-\alpha}$, $t_e^{-1} = t_e$, $i^{-1} = i$ és $c_{e,\mathbf{v}}^{-1} = c_{e,-\mathbf{v}}$.

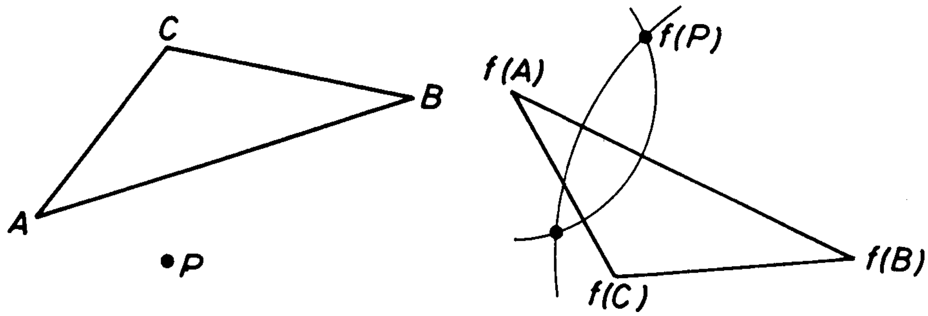


3. ábra

Két egybevágósági transzformációt egymás után végrehajtva ismét egybevágósági transzformációt kapunk, hiszen mindkét leképezés megtartja a pontok távolságát. Az így keletkező egybevágósági transzformációt a két eredeti leképezés *szorzatá*nak nevezzük. Tehát a g_1 és g_2 egybevágósági transzformációk szorzata az a g_2g_1-gyel jelölt leképezés, amelyre $(g_2g_1)(P) = g_2(g_1(P))$. Nyilvánvalóan $e_{\mathbf{u}}e_{\mathbf{v}} = e_{\mathbf{u}+\mathbf{v}}$ (*3. ábra*), $f_{O,\alpha}f_{O,\beta} = f_{O,\alpha+\beta}$, (illetve $f_{O,\alpha+\beta-360^\circ}$, ha $\alpha + \beta \geqq 360^\circ$).

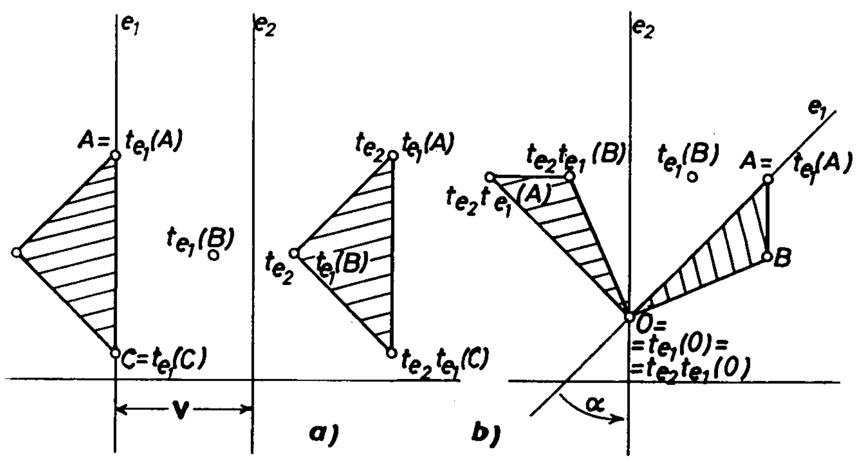
Mielőtt továbbmennénk, vegyük észre, hogy három, nem egy egyenesen fekvő pont képe egyértelműen meghatározza az egybevágósági transzformációt, ugyanis $f(P)$ távolsága $f(A)$-tól $\overline{PA}$, $f(B)$-től $\overline{PB}$, tehát $f(P)$ az $f(A)$ középpontú

$\overline{PA}$ sugarú és az $f(B)$ középpontú $\overline{PB}$ sugarú kör valamelyik metszéspontja (ill. érintési pontja, ha P az AB egyenesen fekszik). A két metszéspont szimmetrikus az $f(A)f(B)$ egyenesre, így távolságuk az$f(C)$ ponttól különböző, ezért az $\overline{f(P)f(C)} = \overline{PC}$ feltétel egyértelműen kijelöli $f(P)$-t (*4. ábra*).



4. ábra

Most már könnyen meghatározhatjuk két tükrözés szorzatát is. Ha tengelyeik azonosak, azaz $e_1 = e_2$, akkor $t_{e_2}t_{e_1} = i$. Ha e_1 és e_2 párhuzamosak, akkor $t_{e_2}t_{e_1} = e_{2\mathbf{v}}$, ahol $\mathbf{v}$ jelöli azt az e_1-re merőleges vektort, amely e_1-et e_2-be viszi. Ha e_1 és e_2 metsző egyenesek, akkor $t_{e_2}t_{e_1} = f_{O,2\alpha}$, ahol O jelöli e_1 és e_2 metszéspontját, α pedig az általuk bezárt szöget (e_1-től e_2 felé). Figyelembe véve, hogy három pont képe egyértelmûen meghatározza az egybevágósági transzformációt, ezek az összefüggések könnyen leolvashatók az *5. ábrából.*



5. ábra

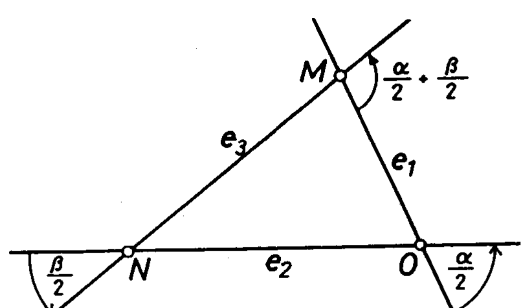
A leképezések szorzására a következő összefüggések érvényesek:

(1) $$f_3(f_2f_1) = (f_3f_2)f_1$$

(2) $$if = fi = f$$

(3) $$f^{-1}f = ff^{-1} = i.$$

Az első összefüggést, a szorzás asszociativitását, a következőképpen láthatjuk be: $(f_3(f_2f_1))(P) = f_3((f_2f_1)(P) = f_3(f_2(f_1(P))) = (f_3f_2)(f_1(P)) = ((f_3f_2)f_1)(P)$. A (2) és (3) összefüggés az identikus leképezés, illetve az inverz definíciójából nyilvánvaló. Megjegyezzük, hogy a leképezések szorzása általában nem kommutatív, például párhuzamos tengelyű tükrözések szorzatára $t_{e_2}t_{e_1} = e_{2\mathbf{v}}$, de $t_{e_1}t_{e_2} = e_{-2\mathbf{v}}$.



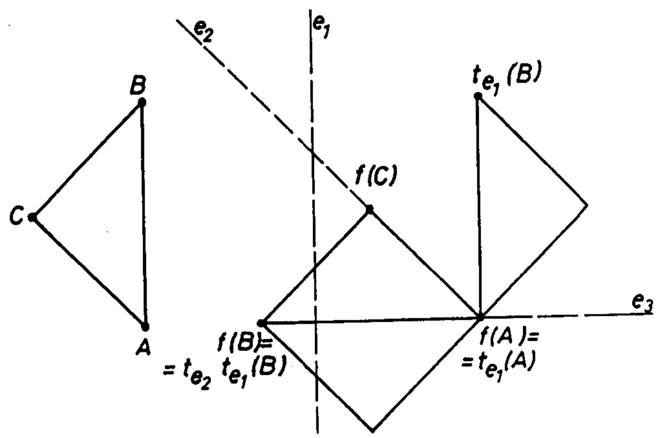
$$f_{N,\alpha}f_{O,\beta} = f_{M,\alpha+\beta}$$

6. ábra

Láttuk, hogy közös középpontú forgatások szorzata szintén forgatás, de vajon mi a helyzet, ha a két forgatás középpontja különböző? Vegyük tehát az $f_{0,\alpha}$ és $f_{N,\beta}$ forgatásokat ($O \neq N$). Írjuk fel $f_{O,\alpha}$-t mint két O-n átmenő egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatát. Az egyik egyenes irányát tetszőlegesen választhatjuk, a másodiknak ezzel $\frac{\alpha}{2}$ szöget kell bezárnia. Ugyanígy $f_{N,\beta}$-t is felírhatjuk mint két N-en átmenő, egymással $\frac{\beta}{2}$ szöget bezáró egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatát. Az egyik egyenes szabadon választható, vegyük ezt mindkétszer az $e_2 = ON$ egyenesnek. Ekkor $f_{O,\alpha} = t_{e_2}t_{e_1}, f_{N,\beta} = t_{e_3}t_{e_2}$, tehát $f_{N,\beta}f_{O,\alpha} = (t_{e_3}t_{e_2})(t_{e_2}t_{e_1})$, ami az asszociativitást használva így alakítható: $= ((t_{e_3}t_{e_2})t_{e_2})t_{e_1} = (t_{e_3}(t_{e_2}t_{e_2}))t_{e_1}$. Itt $t_{e_2}t_{e_2} = i$, így (2) szerint $f_{N,\beta}f_{O,\alpha} = (t_{e_3}i)t_{e_1} = t_{e_3}t_{e_1}$. Ha e_3 és e_1 párhuzamosak, akkor egy eltolást kapunk, ha metszők, akkor egy forgatást (*6. ábra*).

Hasonlóan számíthatjuk ki egy forgatás és egy eltolás szorzatát is.

Megmutatjuk, hogy minden egybevágósági transzformáció felírható két vagy három tükrözés szorzataként. Legyen f egy tetszőleges egybevágósági transzformáció és vegyünk három, nem egy egyenesen fekvő pontot, jelölje ezeket A, B és C. Legyen $Af(A)$ szakasz felező merőlegese e_1, illetve ha $f(A) = A$, akkor legyen e_1 tetszőleges, az A-n átmenő egyenes. Ekkor $t_{e_1}(A) = f(A)$, így $\overline{t_{e_1}(B)f(A)} = \overline{t_{e_1}(B)t_{e_1}(A)} = \overline{BA} = \overline{f(B)f(A)}$, tehát $t_{e_1}(B)f(B)$ szakasz felező merőlegese, e_2, átmegy $f(A)$-n. (Ha $t_{e_1}(B) = f(B)$, akkor vegyük e_2-nek az $f(B)f(A)$ egyenest.) Most $t_{e_2}t_{e_1}(A) = t_{e_2}(f(A)) = f(A)$ és $t_{e_2}t_{e_1}(B) = f(B)$. Ha $t_{e_2}t_{e_1} = f(C)$ is teljesül, akkor $t_{e_2}t_{e_1} = f$, hiszen az A, B és C pontok képei egyértelműen meghatározzák az egybevágósági transzformációt. Ha $t_{e_2}t_{e_1}(C) \neq f(C)$, akkor ezek a pontok egymásnak az $e_3 = f(A)f(B)$ egyenesre vonatkozó tükörképei, így az előzőhöz hasonló érveléssel $f = t_{e_3}t_{e_2}t_{e_1}$. (Az asszociatívitás miatt nem szükséges a szorzatot zárójeleznünk.) (*7. ábra*)



7. ábra

Két tükrözés szorzata - mint már láttuk - vagy az identitás vagy egy eltolás vagy egy forgatás, aszerint, hogy a tengelyeik megegyeznek, párhuzamosak vagy metszők. Nézzük meg, hogy milyen transzformációkat kaphatunk három tükrözés szorzataként. Ha az első kettő szorzata az i, akkor a szorzat egy tükrözés. Ha az első kettő szorzata az $e_{\mathbf{v}}$ eltolás, akkor két esetet kell megkülönböztetnünk. Amennyiben $\mathbf{v}$ merőleges az e_3 tengelyre is, akkor $t_{e_3}(t_{e_2}t_{e_1}) = t_{e_3}(t_{e_3}t_{e_4}) = (t_{e_3}t_{e_3})t_{e_4} = it_{e_4} = t_{e_4}$, ahol az e_4 tengelyt az e_3 egyenest $-\frac{\mathbf{v}}{2}$-vel eltolva nyerjük. Ha viszont v nem merőleges az e_3 tengelyre, akkor e_2 és e_3 metszi egymást egy O pontban. Forgassuk el az O körül az e_2 és e_3 egyeneseket úgy, hogy közbezárt szögük ne változzon, és e_2 elforgatottja, e_2', merőleges legyen e_1-re. Jelölje e_2' és e_1 metszéspontját M. Most M körül forgassuk el e_1-et és e_2'-t úgy, hogy közbezárt szögük ($90°$) ne változzon, és e_2', elforgatottja e_2'', párhuzamos legyen e_3'-vel. Ekkor $t_{e_3}t_{e_2} = f_{O,\alpha} = t_{e_3'}t_{e_2'}$, valamint $t_{e_2'}t_{e_1} = f_{M,180°} = t_{e_2''}t_{e_1''}$, továbbá, mivel e_2'' és e_3' párhuzamosak egymással és merőlegesek e_1''-re, következik, hogy $t_{e_3'}t_{e_2''} = e_{\mathbf{v}}$, ahol $\mathbf{v}$ párhuzamos e_1''-vel. Összefoglalva azt kapjuk, hogy $t_{e_3}(t_{e_2}t_{e_1}) = (t_{e_3}t_{e_2})t_{e_1} = (t_{e_3'}t_{e_2'})t_{e_1} = t_{e_3'}(t_{e_2'}t_{e_1}) = t_{e_3'}(t_{e_2''}t_{e_1''}) = (t_{e_3'}t_{e_2''})t_{e_1''} = e_{\mathbf{v}}t_{e_1''} = c_{e_1''\mathbf{v}}$, egy csúsztatva tükrözés. Hasonlóan beláthatjuk, hogy abban az esetben is, ha $t_{e_2}t_{e_1}$ forgatás, $t_{e_3}(t_{e_2}t_{e_1})$ akkor is vagy tükrözés, vagy csúsztatva tükrözés. Ezáltal igazoltuk, hogy nincs más egybevágósági transzformáció, csak a forgatások, az eltolások, a tükrözések, a csúsztatva tükrözések és az identitás.

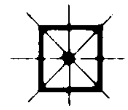
Vizsgáljuk meg, hogy mely pontok, illetve egyenesek képződnek önmagukra az egyes transzformációk során:

transzformáció	*fixpont*	*fixegyenes*
i	minden pont	minden egyenes
$e_{\mathbf{v}}$	nincs	$\mathbf{v}$ irányú egyenesek
$f_{O,\alpha}$	O	$\begin{cases} \text{nincs, ha } \alpha \neq 180° \\ O\text{-n átmenő egyenesek, ha } \alpha = 180° \end{cases}$
t_e	e pontjai	e és az e-re merőleges egyenesek
$c_{e,\mathbf{v}}$	nincs	e

Eddig az egész síkot vizsgáltuk, most alakzatokkal fogunk foglalkozni, ezeket osztályozhatjuk szimmetriatulajdonságaik alapján, azaz megvizsgálhatjuk, hogy mely f egybevágósági transzformációk képezik le az alakzatot önmagára.

Jól ismert példa erre a négyszögek osztályozása. Jelölje e_1 és e_2 a két átlót, e_3 és e_4 a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő egyeneseket, K pedig az átlók metszéspontját. A következő típusokat különböztetjük meg:

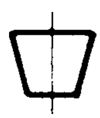
négyzet : $i,\ f_{K,90^\circ},\ f_{K,180^\circ},\ f_{K,270^\circ},\ t_{e_1},\ t_{e_2},\ t_{e_3},\ t_{e_4}$



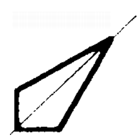
téglalap: $i,\ f_{K,180^\circ},\ t_{e_3},\ t_{e_4}$

rombusz: $i,\ f_{K,180^\circ},\ t_{e_1},\ t_{e_2}$

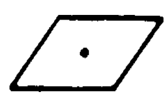
szimmetrikus trapéz: $i,\ t_{e_3}$



deltoid: $i,\ t_{e_1}$



parallelogramma: $i,\ f_{K,180^\circ}$



általános négyszög: i

Hasonlóan, a lehetséges szimmetriák szerint fogjuk osztályozni a sormintákat is. *Sormintá*nak egy olyan alakzatot nevezünk, amely két párhuzamos egyenes közötti sávban helyezkedik el, és van olyan eltolás, amely az alakzatot önmagába viszi. (Ekkor természetesen az alakzat a „végtelenbe nyúlik”, de ábráinkon csak egy véges részletét tudjuk megrajzolni.) Feltételezzük, hogy van egy olyan legrövidebb vektor, $\mathbf{u}$, amivel való eltolás a sormintát önmagába viszi. Vegyünk most egy tetszőleges $e_{\mathbf{v}}$ eltolást, amelyik a sormintát önmagára képezi le. Ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ iránya megegyezik, akkor legyen $n = [|\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|]$, ahol $|\mathbf{v}|$ a $|\mathbf{v}|$ vektor hosszát, $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli. Ekkor $|\mathbf{v}-n\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|-n|\mathbf{u}| < |\mathbf{u}|$, és $e_{\mathbf{v}-n\mathbf{u}} = e_{\mathbf{v}}(e_{\mathbf{u}}^{-1})^n$ is szimmetriája a sormintának. Mivel $\mathbf{u}$ a legrövidebb vektor volt, amivel a sorminta eltolható, ezért $\mathbf{v}-n\mathbf{u} = 0$, azaz $\mathbf{v} = n\mathbf{u}$. Hasonlóan járhatunk el, ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}$ ellentétes irányúak, és azt nyerjük, hogy pontosan az $e_{n\mathbf{u}}(n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$ eltolások azok, amelyek sormintánkat önmagába viszik. (Itt a nullvektorral való eltoláson az identikus leképezést értjük.)

Mivel a sorminta minden szimmetriája a sáv e középegyenesét önmagába kell vigye, az egybevágósági transzformációk fixegyeneseinek számbavételéből tudjuk, hogy csak a következő fajta szimmetriák jöhetnek szóba:

1. e-vel párhuzamos eltolások
2. e-n fekvő pontok körüli 180°-os forgatások
3. e-re merőleges egyenesekre vonatkozó tükrözések
4. e-re való tükrözés, ill. e tengelyű csúsztatva tükrözések.

Jelöljük az egyes típusú szimmetriák halmazát rendre a következőképpen: $E,\ F,\ T,\ C$. Már megmutattuk, hogy E pontosan az $e_{n\mathbf{u}}(n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$ alakú eltolásokból áll. Legyen most G az $F,\ T,\ C$ osztályok valamelyike. Ha g_1 és g_2 G-beli szimmetriák, akkor $g_2g_1^{-1}$ is szimmetriája a sormintának és ez minden esetben eltolás: $f_{O,180^\circ}f_{N,180^\circ}^{-1} = e_{2\mathbf{v}}$, ahol $\mathbf{v} = \overrightarrow{NO}$; $t_{e_2}t_{e_1}^{-1} = e_{2\mathbf{v}}$, ahol $\mathbf{v}$ az e_1-re merőleges, e_1-et e_2-be vivó vektor (ez e-n fekszik, mivel e_1 és e_2 merőleges e-re, lásd 3. eset); $c_{e,\mathbf{v}_2}c_{e,\mathbf{v}_1}^{-1} = e_{\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1}$. Tehát $g_2g_1^{-1} \in E$, így $g_2g_1^{-1} = e_{n\mathbf{u}}$, valamely n-re. Innen $g_2 = e_{n\mathbf{u}}g_1$, azaz a G osztály minden eleme felírható $e_{n\mathbf{u}}g_1$ alakban, ahol g_1 egy rögzített eleme G-nek. Az is könnyen ellenőrízhető, hogy minden $e_{n\mathbf{u}}g_1$ alakú szimmetria ugyanabba az osztályba tartozik, mint g_1, tehát a G osztály elemei éppen az $e_{n\mathbf{u}}g_1$ alakú egybevágósági transzformációk. Előfordulhat persze, hogy valamelyik osztály üres, az adott sormintának nincs ilyen típusú szimmetriája. Ha $f_{O,180^\circ} \in F$, akkor az $e_{n\mathbf{u}}f_{O,180^\circ}$ alakú transzformációk mind 180° -os forgatások és középpontjaik az e tengelyen $|\mathbf{u}|/2$ távolságra követik egymást. Ha $t_{e_1} \in T$, akkor az $e_{n\mathbf{u}}t_{e_1}$ tükrözések tengelyei e-re merőlegesek és egymástól $|\mathbf{u}|/2$ távolságra helyezkednek el. Ha a $c_{e,\mathbf{v}}$ csúsztatva tükrözés C-hez tartozik, akkor a C osztály az $e_{n\mathbf{u}}c_{e,\mathbf{v}} = c_{e,\mathbf{v}+n\mathbf{u}}$ alakú csúsztatva tükrözésekből áll. Vegyük észre, hogy $c_{e,\mathbf{v}}^2 = e_{2\mathbf{v}}$ miatt ezekre a csúsztatva tükrözésekre két lehetőség adódik. Mivel a $2\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{u}$-nak egész számszorosa kell legyen, ha $2\mathbf{v} = 2k\mathbf{u}$, akkor C a $c_{e,n\mathbf{u}}$ alakú csúsztatva tükrözésekből áll, beleértve $c_{e,O} = t_e$ tükrözést; ha viszont $2\mathbf{v} = (2k+1)\mathbf{u}$, akkor C éppen a $c_{e,(n+1/2)\mathbf{u}}$ alakú csúsztatva tükrözések halmaza. Az első halmazt C_0-lal, a másodikat $C_{1/2}$-lel fogjuk jelölni.

Végül vegyük észre, hogy $f \in F,\ t \in T,\ c \in C$ esetén $ft \in C,\ fc \in T,\ tc \in F$! Például $f_{0,180^\circ}t_{e_1} = c_{e,\mathbf{v}}$, ahol $\mathbf{v}$ az e_1 és e metszéspontjából O-ba mutató vektort jelöli. Ennek alapján egy sorminta lehetséges szimmetriáira a következő esetek fordulhatnak elő:

I) csak eltolások (E),

II) eltolások és 180°-os forgatások $(E,\ F)$,

III) eltolások és tükrözések $(E,\ T)$,

IV) eltolások és csúsztatva tükrözések, köztük az e-re vonatkozó tükrözés is $(E,\ C_0)$,

V) eltolások és csúsztatva tükrözések, de az e-re való tükrözés nem $(E,\ C_{1/2})$.

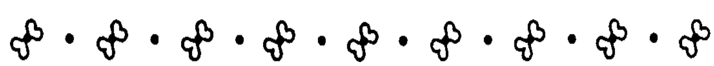
A további esetekben a forgatások, tükrözések és csúsztatva tükrözések közül legalább kétféle fellép, de akkor az előző észrevétel szerint a harmadik fajta is, így a további lehetőségek:

VI) $E,\ F,\ T,\ C_0$ és

VII) $E,\ F,\ T,\ C_{1/2}$.

A hét lehetőség mindegyike valóban elő is fordul, amint azt az alábbi példák mutatják: I. E

II. E, F



III. E, T

IV. E, C_0

V. $E, C_{1/2}$

VI. E, F, T, C_0

VII. $E, F, T, C_{1/2}$

Megemlítem, hogy a sík „tapétázásai" is hasonlóképpen osztályozhatók, itt olyan mintákat kell vizsgálni, amelyek két különböző irányú vektorral való eltolással is önmagukba vihetők. Az ilyen minták a szimmetriák szempontjából már 17-féle csoportba sorolhatók. A mór művészet díszítőmintái között mind a tizenhétfélére találunk példákat. A térbeli, három irányban ismétlődő minták a kristálytanban jutnak szerephez, itt már 230 lehetőség adódik.