1. *Nevezzük n adott pozitív szám különös közepének a számok négyzetösszegének és összegének hányadosát, harmadik hatványközepüknek pedig köbeik számtani közepének a köbgyökét. Döntsük el $n=2$ esetén, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül.*

a) *A különös közép sohasem kisebb a harmadik hatványközépnél.*

b) *A különös közép sohasem nagyobb a harmadik hatványközépnél.*

c) *A különös közép a számok választásától függően lehet nagyobb és kisebb is a harmadik hatványközépnél.*

Melyik állítás igaz $n=3$ esetén?

I. megoldás. Legyenek az adott pozitív számok $a_1, a_2 \ldots, a_n$. Tudjuk, hogy két pozitív szám közül a köbe a nagyobbnak lesz nagyobb, és hasonló áll a pozitív számszorosukra is. A két közép különbsége tehát ugyanolyan előjelű, mint a köbeik különbségének $n(a_1+a_2+\ldots+a_n)^3$-szorosa.

Erre a kifejezésre $n=2$ esetén egyszerű átalakításokkal a következő azonosságot nyerjük:

$$2(a_1^2+a_2^2)^3-(a_1+a_2)^3(a_1^3+a_2^3)=(a_1+a_2)^3(a_1^3-a_2^3).$$

Ha tehát $a_1=a_2$, akkor a különbség 0, a két közép egyenlő, különben a jobb oldal két tényezője egyező előjelű, így szorzatuk pozitív; a különös közép tehát nagyobb a harmadik hatványközépnél. Eszerint két szám esetén az a) állítás igaz.

Három szám esetén viszont a c) állítás az igaz. Ennek igazolására elég megadni egyrészt három olyan számot, amelyek különös közepe nagyobb harmadik hatványközepüknél, másrészt három olyant, amelyekre a különös közép a kisebb. Az előbbi tulajdonságú az 1, 1, 2 hármas. Erre

$$3(1^2+1^2+2^2)^3=648, \quad (1+1+2)^3(1^3+1^3+2^3)=640.$$

Az utóbbira példa a 2, 2, 3 hármas. Erre

$$3(2^2+2^2+3^2)^3=14739, \quad (2+2+3)^3(2^3+2^3+3^3)=14749.$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

Megjegyzés. Volt, aki három olyan számtól remélte, hogy a harmadik hatványközepük lesz a nagyobb, amelyek közt kicsi, egyenlő különbség van. Ez azonban nem következik be. Ha a három szám $a-b$, a, $a+b$, ahol $0<b<a$, akkor a különös közép

$$\frac{(a-b)^2+a^2+(a+b)^2}{3a}=a+\frac{2b^2}{3a},$$

a harmadik hatványközép köbe pedig

$$\frac{(a-b)^3+a^3+(a+b)^3}{3}=a^3+2ab^2.$$

Mivel az előbbi érték köbe ezzel a két taggal kezdődik, és ehhez további két pozitív tag járul, így az ilyen számhármasoknak mindig a különös közepe nagyobb.

II. megoldás. Jegyezzük meg először, hogy ha a közepek nagyságviszonyát vizsgáljuk, akkor megszorozhatjuk mindegyik számot ugyanazzal a pozitív számmal, hiszen ekkor a két közép is ezzel a számmal szorzódik meg, nagyságviszonyuk tehát nem változik. Így feltehetjük, hogy a számok számtani közepe 1, mert ha nem így volna, akkor eloszthatjuk mindegyiket a számtani középpel.

Vizsgáljuk a két közép viszonyát olyan számokra, amelyek közül $n-1$ egyenlő és kisebb mint 1, tehát $1-c$, ahol $0<c<1$, az n -edik pedig $1+(n-1)c$. Az első megoldás megjegyzésének megfelelően elég a közepek köbének a különbségét vizsgálni. Ez

$$\left(\frac{n+n(n-1)c^2}{n}\right)^3-\frac{n+3((n-1)+(n-1)^2)c^2+(-(n-1)+(n-1)^3)c^3}{n}=$$

$$=1+3(n-1)c^2+3(n-1)^2c^4+(n-1)^3c^6-1-3(n-1)c^2-(n-1)(n-2)c^3=$$

$$=-(n-1)c^3(n-2-3(n-1)c-(n-1)^2c^3).$$

Két szám ($n=2$) esetén ez mindig pozitív, és jegyezzük meg, hogy ekkor az általános esettel van dolgunk, miután nincsenek egyenlő számok. Ekkor tehát az a) állítás az igaz.

Pozitív a kifejezés 2-nél nagyobb n-re is, ha c elég nagy (de 1-nél kisebb), pl. $c=\dfrac{2}{3}$. Ha viszont c kicsi, pl. $c=\dfrac{1}{4(n-1)}$, (és $n \geqslant 3$), akkor a zárójelben levő kifejezés

$$n-\frac{11}{4}-\frac{1}{64(n-1)} \geq n-\frac{353}{128} \geq \frac{384-353}{128}>0.$$

Ekkor tehát a harmadik hatványközép a nagyobb.

Azt nyertük tehát, a feladatban feltettnél általánosabb kérdésre adva választ, hogy 2-nél több szám esetén mindig a c) állítás az igaz.

Megjegyzések. 1. A harmadik hatványközép lehet csupa különböző szám esetén is nagyobb a különös középnél. Három szám esetén pl. – kényelem kedvéért egész számokra szorítkozva – legyen két szám a 23 és a 25. Azt vehetjük észre, hogy a harmadik számot 29 és 36 közt választva a harmadik hatványközép lesz a nagyobb, viszont 28-at vagy 37-et választva már a különös közép a nagyobb.

2. Meglepő eredményt kapunk, ha azt vizsgáljuk, hogy három szám esetén a harmadik hatványközép és a különös közép hányadosa mekkora lehet. Ez a hányados a maximumát az 1, 1, $\sqrt{2}$ hármasra (és az ezzel arányosakra) veszi fel; a maximum értéke mindössze

$$\sqrt[3]{\frac{24+17\sqrt{2}}{48}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{578}{576}}\right)}=1{,}00028902.$$

2. *Tetszőleges pozitív egész k-ra legyen $f_1(k)$ a tízes számrendszerben felírt k szám jegyei összegének a négyzete és $n>1$ esetén legyen $f_n(k)=f_1(f_{n-1}(k))$. Mennyi $f_{1992}(2^{1991})$?*

Megoldás. A kérdésre annak alapján tudunk választ adni, hogy egyrészt a számjegyek számát határozzuk meg, másrészt a kérdezett szám maradékát, ha 9-cel osztjuk.

Jelöljük a 2^{1991} számot K-val.

$$K=8^{\frac{1991}{3}}<10^{664}.$$

A K szám tehát legfeljebb 664 jegyű, s így jegyeinek az összege nem több mint $664\cdot 9$, ami 6000-nél kisebb. Eszerint $f_1(K)<36\cdot 10^6$. Eddig a korlátig a 29 999 999 szám jegyeinek az összege a legnagyobb, 65. Így

$$f_2(K)\le 4225.$$

Hasonlóan számolva

$$f_3(K)\le(3+3\cdot 9)^2=900.$$

Egy legfeljebb háromjegyű k számra $f_1(k)\le(3\cdot 9)^2=729$, tehát szintén legfeljebb háromjegyű. Így, ha $n\ge 3$, akkor $f_n(K)$ legfeljebb háromjegyű.

Ismeretes, hogy egy szám 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a számjegyeinek az összege; továbbá két szám szorzatának a maradéka, ha 9-cel osztunk, ugyanannyi, mint a maradékaik szorzatáé, mivel $(9r+s)(9t+u)=9(9rt+ru+st)+su$. Ezek alapján

$$K=2^{6\cdot 331+5}=64^{331}\cdot 32=(9\cdot 7+1)^{331}(9\cdot 3+5)$$

maradéka 5, s így ennyi a számjegyei összegének a maradéka is. $f_1(K)$ maradéka tehát annyi, mint 25-é, azaz 7; $f_2(K)$ maradéka annyi, mint 49-é, vagyis 4; $f_3(K)$ maradéka annyi, mint 16-é, ami 7. Ennyi a maradéka a számjegyei összegének is, és a szám legfeljebb háromjegyű, így a számjegyek összege csak 7, 16 és 25 lehet. $f_4(K)$ lehetséges értékei 49, 256 és 625. $f_5(K)$ értéke már mind a három esetben ugyanaz: 169. Folytatva a számolást

$$f_6(K)=256,\quad f_7(K)=169,\quad f_8(K)=256.$$

Világos, hogy innen periodikusan páros indexre 256-ot kapunk, páratlanra 169-et. A feladat kérdésére tehát a válasz

$$f_{1992}(2^{1991})=256.$$

Megjegyzések. 1. Természetesen más a-ra, e-re és n-re is meghatározható hasonlóan $f_n(a^c)$, és könnyen látható, hogy elég nagy n-re 169-en és 256-on kívül csak az 1 és a 81 fordul elő.

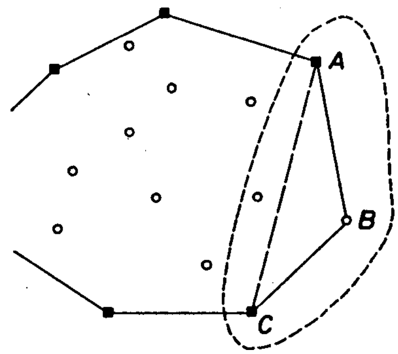
2. Számítógéppel meghatározható 2^{1991} számjegyeinek az összege, ez 2669. Innen $f_1(K)=7123561$, $f_2(K)=625$, $f_3(K)=169$, $f_4(K)=256$, és már innen ismétlődik periodikusan az utolsó két érték.

3. *Adott a síkban véges sok pont, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy kiszínezhetők két színnel úgy, hogy ne legyen olyan félsík, amely a pontok közül pontosan hármat tartalmaz, és azok egyszínűek.*

Megoldás. Vegyük a ponthalmaz konvex burkát, azt a legkisebb sokszöget, amelyik az összes pontot tartalmazza. (Lásd az alábbi 1. megjegyzést). Ennek csúcsai az adott pontok közül valók, és a feltétel szerint az oldalszakaszok belsejére nem esik adott pont.

Egy olyan félsík, amelyikbe három adott pont esik, tartalmazza a pontok meghatározta háromszöget, így tartalmaz a konvex burok belsejében levő pontot. A határegyenese tehát átmetszi a konvex burkot, ezért a félsík tartalmazza a konvex burok legalább egy csúcsát.

A burok belsejében lehetnek az adott pontok közül olyanok, amelyeket egy olyan félsík sem tartalmaz, amelyikbe csak három adott pont esik. Ezek színezése a feladat követelményének teljesülését nem befolyásolja. Ez adhatja azt a gondolatot, hogy az összes belső pontot fessük ugyanolyanra, mondjuk kékre.

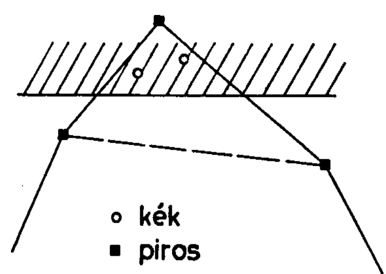


1. ábra

A burok csúcsait ezután több lépésben színezzük ki. Első lépésben fessük az összeset pirosra. Ha most van három szomszédos csúcs, A, B, C, amelyek meghatározta háromszög nem tartalmaz további adott pontot, akkor B színét változtassuk kékre (1. *ábra*). Ha ezután is maradt ilyen csúcs-hármas, akkor ismételjük az eljárást. Ez véges számú lépésben befejeződik.

Megmutatjuk, hogy így megfelelő színezéshez jutunk. Jegyezzük meg, hogy nem keletkezik a konvex burkon két szomszédos kék csúcs, mert ha egy csúcsot kékre festünk, akkor a szomszédos csúcsok már nem lehetnek olyan háromszög középső csúcsai, amelyiknek mind a három csúcsa piros.

Ha egy félsík három csúcsot tartalmaz, akkor az azok meghatározta háromszög nem tartalmaz további adott pontot, tehát vagy a középső csúcs kék, a két szomszédja piros, vagy azért nem változtattuk meg a középső csúcs színét, mert a csúcsok nem voltak egyszínűek.

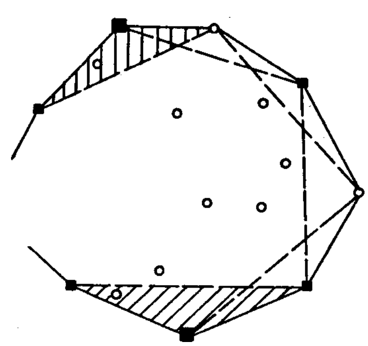


2. ábra

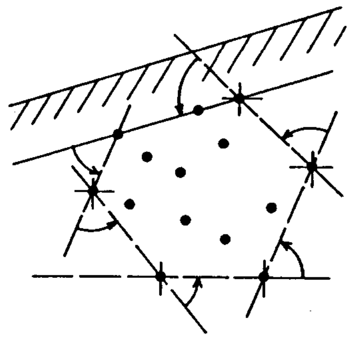
Ha két csúcsot tartalmaz a félsík, akkor tartalmaz a konvex burok belsejében lévő, tehát kék pontot, viszont a két csúcsnak legfeljebb az egyike lehet kék.

Ha végül a három pontot tartalmazó félsík egy csúcsot tartalmaz, akkor a határegyenese átmetszi az abból induló két oldalt (*2. ábra*). A tartalmazott csúcs és a két szomszédja tehát olyan háromszöget határoz meg, amelyik tartalmaz a burok belsejében levő (tehát kék) pontot, s így a csúcsot meghagytuk pirosnak. Ezzel állításunkat beláttuk.

Megjegyzések. 1. A sík egy véges ponthalmazának a konvex burkát megkaphatjuk például úgy, hogy választunk egy félsíkot, amelyik tartalmazza a ponthalmazt. Annak a határegyeneshez legközelebbi (egyik) pontján át a határegyenessel párhuzamost húzunk, majd ezt forgatjuk a rajta levő, vagy ha több van, az egyik szélső adott pont körül úgy, hogy a ponthalmaz az egyik oldalán legyen, amíg újabb adott pont nem kerül rá. Ezután ekörül, illetőleg megint a szélső körül forgatjuk tovább az egyenest ugyanabban az irányban (3. *ábra*). Az eljárás véges számú lépésben befejeződik azzal, hogy visszajutunk az egyenes kezdő helyzetéhez. A forgásközéppontok a keresett konvex burok csúcsai.



3. ábra



4. ábra

2. A megoldásban leírt eljárást adta meg Boda Péter. Ez láthatóan általában nem egyértelmű, több megfelelő színezéshez is vezethet aszerint, hogy hogyan választjuk azokat a háromszögeket, amelyek középső csúcsát átszínezzük.

A feladat többi megoldói a következő eljárást adták. A belső pontok kékre festése után pirosra festjük a konvex burok egy csúcsát, ha az a szomszédos csúcsokkal olyan háromszöget alkot, amelyik tartalmaz a belsejében adott pontot. Végül az esetleg színezetlenül maradt csúcsok alkotta íveken egy irányba haladva a szomszédos piros csúcs utánit kékre festjük, és a következőket felváltva pirosra és kékre, míg a következő piros csúcsig nem érünk (4. *ábra*), a burok két szélső csúcsa lehet kék is, piros is.

A leírt színezés is kiadja ezt, ha egy irányba haladva mindig a legközelebbi háromszöget vesszük, amelyiknek a középső csúcsát át kell színezni. Ebből látható, hogy ez az eljárás is megfelelő.