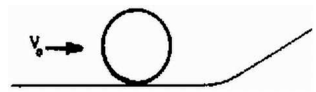
Az 1991/92. évi fizika OKTV második fordulójának feladatai [1]

I. kategória *(szakközépiskolások)*

1. *Egy vízszintes érdes és egy hozzá törésmentesen csatlakozó lejtőből álló merev felületen* $v_0 = 3{,}5$ m/s *sebességgel csúszásmentesen gördül egy* $r = 0{,}1$ m *sugarú vékony abroncs a lejtő felé, merőlegesen a vízszintes síkkal való érintkezési vonalára.*

a) *Mikor jut magasabbra az abroncs, ha a lejtőn van súrlódás, vagy ha nincs?*

b) *Ha lejtős rész ideálisan sima, a róla visszaérkező abroncs milyen távol lesz a lejtő aljától az odaérkezéstől számított* $t = 2{,}4$ s *múlva?*



(A vízszintes sík és az abroncs közötti súrlódási együttható $\mu_0 = \mu = 0{,}2$*, a lejtő a síkhoz* $R > r$ *görbületi sugarú hajlattal csatlakozik, az abroncs a mozgása során nem dől el.)*

(Holics László)

Megoldás. a) Az abroncs akkor jut magasabbra, ha van súrlódás, mert ebben az esetben a forgási energiájának egy része (esetleg az egésze) is átalakul helyzeti energiává (más szóval az abroncs felfelé haladtában csökken tömegközéppontjának sebessége, így felfelé mutató – szögsebességet csökkentő – súrlódási erő is hat rá, ami emeli az abroncsot!).

Érdekes, hogy amennyiben az abroncs mindvégig tapad (csúszásmentesen gördül), akkor feljut

$$\Delta h_1 = \frac{E_{\text{kin}}}{mg} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\omega^2}{mg} = \frac{v_0^2}{g}$$

magasra, míg ha nincs súrlódás, csak

$$\Delta h_2 = \frac{E_{\text{haladó}}}{mg} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{mg} = \frac{v_0^2}{2g}$$

magasságig ér fel.

A két magasság aránya abroncs esetén

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = 2.$$

(Megjegyezzük, hogy gömb esetén ugyanez az arány $7/5 = 1{,}4$.)

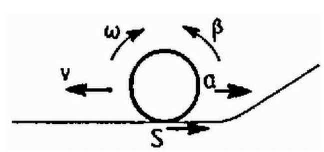
Ha a lejtőn kicsi a súrlódás, köszörülve emelkedik a golyó és Δh emelkedési magasságára:

$$\Delta h_2 < \Delta h < \Delta h_1$$

ilyenkor az energia egy része disszipálódik.

b) Amikor az abroncs eléri a lejtőt, ha $r < R$, *ütközés nélkül* gördül fel rajta. Odaérkezéskor középpontjának sebessége v_0, szögsebessége pedig

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r}.$$



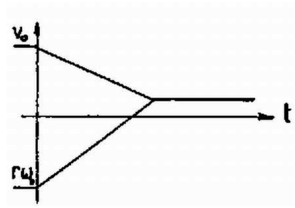
A lejtőn súrlódás híján (mivel így az abroncsra külső forgatónyomaték nem hat) a sajátperdület és ezzel a szögsebesség mindvégig megmarad. Az abroncs felcsúszik

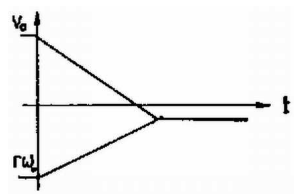
$$\frac{v_0^2}{2g}$$

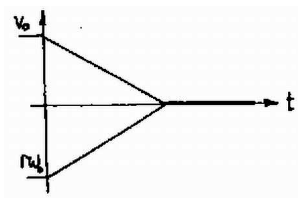
magasra, ahol sebessége zérussá válik, majd visszacsúszik a lejtő aljára, ahová ismét v_0 nagyságú, de ellenkező irányú sebességgel érkezik, miközben *forgási iránya nem változik meg.* Így a vízszintes síkra visszaérkező abroncs *köszörülve* kezdi meg mozgását, amely köszörülés mindaddig tart, míg a súrlódási erő forgatónyomatéka szögsebességét az aktuális sebességgel összehangolva $\omega = v/r$ nagyságúra és megfelelő irányúra nem állítja be. (Ez elvileg lehetséges úgy is, hogy megfordítja a forgásirányt, de úgy is, hogy a sebességet fordítja meg, speciálisan mindkettőt egyszerre zérusra csökkentheti. Mint kiderül, ez a tehetetlenségi nyomaték nagyságától függ. A feladathoz tartozik ennek a vizsgálata.)

A három eset grafikus jellemzése ($t = 0$ a leérkezés pillanata):

[1] Mindegyik feladat megoldása a feladat kitűzőjétől származik.







Számítások:
A vízszintes síkra visszacsúszott abroncs tömegközéppontjának gyorsulása:

$$a = \mu g = \text{const.}$$

Az abroncs szöggyorsulása

$$\beta = -\frac{\mu m g r}{m r^2} = -\frac{\mu g}{r} = \text{const.}$$

Az abroncs központjának mindenkori sebessége az idő függvényében:

$$v = -v_0 + \mu g t,$$

szögsebessége:

$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu g}{r} t.$$

A csúszás t_1 idő múlva befejeződik, amelyre fennáll, hogy

$$-v_0 + \mu g t_1 = \omega_0 r - \mu g t_1,$$

ahonnan

$$2 \mu g t_1 = 2 v_0$$

és

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g} = \frac{3{,}5}{2}\ \text{s} = 1{,}75\ \text{s}.$$

Az abroncs középpontjának sebessége ekkor

$$v = -v_0 + \mu g \frac{v_0}{\mu_0 g} = 0,$$

vagyis éppen azzal a speciális esettel állunk szemben, amelyben az abroncs akkor áll meg, amikor szögsebessége is nullára csökken, s így nem fordul meg sem a sebessége, sem a szögsebessége a visszaút során.

Az abroncs tehát 2,4 s múlva ugyanott lesz, ahol 1,75 s múlva volt, vagyis a lejtő aljától számítva a vízszintes síkon

$$s = -v_0 t_1 + \frac{1}{2} \mu g t_1^2 = -3{,}0625\ \text{m} = -306\ \text{cm}$$

koordinátájú pontban. (Az origó a lejtő aljánál van, a pozitív x-ek a lejtő alatt helyezkednek el.)

Megjegyzés. Tömör gömb esetén annyival komplikáltabb a helyzet, hogy az egy idő után ismét tisztán gördül (a szögsebessége vált irányt), és a megadott időn belül egy lassuló és egy egyenletes mozgásszakasza van. $\omega = 0$, ha

$$t_1 = \frac{2}{5}\frac{v_0}{\mu g} = 0{,}7 \text{ s},$$

a sebessége ekkor

$$v = v_0 - \mu g t_1 = 2{,}1 \text{ m/s},$$

tehát eddig csúszva gördült, ettől kezdve tiszta gördüléssel egyenletesen mozog.

Csúszva megtesz

$$s_{\text{csúsz}} = v_0 t_1 - \mu g t_1 = 1{,}96 \text{ m}$$

utat, míg tisztán gördülve a 2,4 s elteltéig

$$s_{\text{tisz}} = v(t - t_1) = 3{,}57 \text{ m}$$

utat, összesen tehát $s = 5{,}53$ m-re kerül a lejtő aljától.

Olyan eset, hogy visszafelé (ismét a lejtő felé) induljon meg egy hengerszimmetrikus test, csak akkor fordulhat elő, ha az abroncsénál is nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyére nézve (pl. egy orsó gördülne föl egy, a kerekei által közrefogott sínen).

2. *Határozzuk meg a levegő fajhőjét annak ismeretében, hogy a levegő összetétele tömegszázalékban* 75,5 % *nitrogén,* 23,2 % *oxigén és* 1,3 % *argon. A nitrogén, oxigén és argon atomtömege rendre* 14 ATE, 16 ATE és 40 ATE.

(Holics László)

Megoldás. A gázkeverék átlagos, állandó térfogathoz tartozó fajhőjének meghatározása az $E = c_v mT$ összefüggés és az energia additivitása ($E = E_1 + E_2 + E_3$) alapján

$$c_{v_k} mT = c_{v_1} m_1 T + c_{v_2} m_2 T + c_{v_3} m_3 T = c_{v_1}\alpha_1 mT + c_{v_2}\alpha_2 mT + c_{v_3}\alpha_3 mT,$$

végül mT-vel való egyszerűsítés után:

$$c_{v_k} = \alpha_1 c_{v_1} + \alpha_2 c_{v_2} + \alpha_3 c_{v_3}.$$

(Ez valójában a százalékokkal súlyozott számtani közép:

$$c_{v_k} = \frac{\alpha_1 c_{v_1} + \alpha_2 c_{v_2} + \alpha_3 c_{v_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3},$$

ahol $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.)

A fajhő ismert molekuláris kifejezésével:

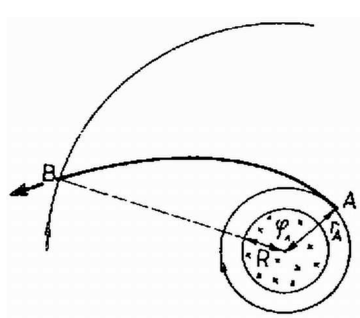
$$c_{v_k} = \alpha_1 \frac{f_1}{2}\frac{R}{M_1} + \alpha_2 \frac{f_2}{2}\frac{R}{M_2} + \alpha_3 \frac{f_3}{2}\frac{R}{M_3} =$$
$$= \left(0{,}755 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{28} + 0{,}232 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{32} + 0{,}013 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{40}\right) \cdot 8{,}31\ \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} = 714{,}85\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}.$$

(A mi levegőnkben nem volt szén-dioxid, ezért kissé eltér a függvénytáblázatbeli adattól, amely 712 J/(kgK) értéket ad meg.)

3. *Egy hosszú, vékony,* $R = 2$ cm *sugarú egyenes tekercs belsejeben a mágneses indukció értéke* $\Delta t = 10^{-1}$ s *alatt* $B = 0{,}8$ Vs/m^2 *értékről egyenletesen* 0*-ra csökken.*

a) *Mekkora gyorsulással indul a tekercs tengelyétől* $r_A = 3$ cm*-re levő* A *pontban nyugvó elektron?*

b) *Mekkora sebességre tesz szert az elektron, mialatt a pályasík és a tekercstengely közös pontjából nézve* $\varphi = 120°$*-os látószögű pályaszakaszon végigfutva a* B *pontba kerül?*



(Holics László)

Megoldás. a) Az elektron gyorsulása az indukált elektromos mező térerősségének és az elektron fajlagos töltésének szorzatával egyenlő. Az elektromos térerősséget az örvényerősség (nyugalmi indukció) törvényéből határozhatjuk meg:

$$\sum^{\circ} E\Delta s\cos\alpha=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Ha az r_A sugarú kör mentén számítjuk az örvényerősséget (körfeszültséget), $\cos\alpha=1$ és az elektromos térerősség nagysága állandó, tehát

$$E\cdot 2r_A\pi=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Innen az elektromos térerősség az elektron kiindulási pontjában:

$$E_A=\frac{1}{2r_A\pi}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Az elektromos mezőt létrehozó mágneses fluxusváltozás $\Delta\Phi=A\Delta B$ nagyságú, a tekercs sugarával kifejezve:

$$\Delta\Phi=R^2\pi\Delta B.$$

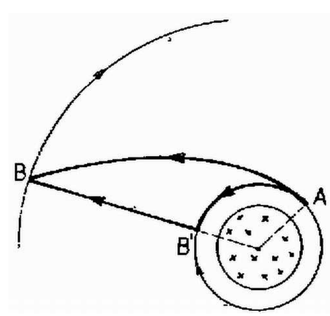
Az elektron gyorsulása ezekkel:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{eE}{m}=\frac{e}{m}\frac{R^2\Delta B}{2r_A\Delta t}.$$

Számadatokkal:

$$a=\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}\cdot 4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2\cdot 0{,}8\ \mathrm{Vs/m}^2}{9{,}1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\cdot 2\cdot 3\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\cdot 10^{-1}\ \mathrm{s}}\approx 9{,}38\cdot 10^9\ \mathrm{m/s}^2.$$

b) Az elektron sebességét az indukált mező munkája szabja meg. A problémát az okozza, hogy az A ponton áthaladó elektromos erővonalról „kisodródik” az elektron, és sem a pályája, sem a pálya mentén mérhető elektromos térerősség nem határozható meg elemi úton.



Az indukált elektromos mező időben állandó, és nem konzervatív, potenciál (feszültség) nem értelmezhető benne. A körfeszültség azonban mindazon görbén számolva, amely nem vesz körül mágneses fluxusváltozást, zérus. Így ha sikerül az elektron tényleges pályagörbeszakaszát olyan zárt görbévé kiegészítenünk, amely nem vesz körül változó mágneses fluxust és a kiegészítő szakaszon könnyen meghatározható a mező munkája, az ismeretlen pályagörbén végzett munkát is meghatározhatjuk elemi úton. Ilyen kiegészítő görbe az ábrán látható azonos látószögű, a tekercs tengelyével koncentrikus körívből és sugár irányú egyenesszakaszból álló vonal. Ennek az első szakaszán, az AB' köríven végzett elektromos munka:

$$W_{\mathrm{el}}=F\cdot s=eEr_A\varphi=e\frac{1}{2r_A\pi}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\cdot r_A\varphi=e\frac{1}{2r_A\pi}\frac{R^2\pi\Delta B}{\Delta t}r_A\varphi=\frac{eR^2\varphi\Delta B}{2\Delta t},$$

függetlenül az elektron kiindulási A pontjának a tengelytől való r_A távolságától. A második, sugárirányú BB' szakaszán végzett munka nulla! Ugyancsak W_{el}-nek kell lennie az AB valódi pályán végzett munkának is.

Ezzel az elektron sebessége (feltételezve, hogy a folyamat vákuumban megy végbe) a munkatétel alapján:

$$\frac{1}{2}mv^2=W_{\mathrm{el}}$$

egyenletből

$$v=\sqrt{\frac{e}{m}\frac{R^2\Delta B}{\Delta t}\varphi},$$

számértékeinkkel:

$$v = \sqrt{\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}\cdot 4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2\cdot 0{,}8\ \mathrm{Vs/m}^2}{9{,}1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\cdot 10^{-1}\ \mathrm{s}}\cdot\frac{2\pi}{3}} \approx 34{,}3\ \mathrm{km/s}.$$

Megjegyzés. Eredményünket a AB' köríven kényszermozgással haladó (egyenletesen gyorsuló körmozgást végző) elektron sebességképletével is megkaphatjuk:

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2\frac{eE}{m}r\varphi} = \sqrt{\frac{eR^2\Delta B}{m\Delta t}\varphi}.$$

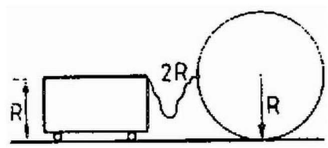
II. és III. kategória *(valamennyi gimnazista)*

1. *Egy R sugarú, homogén, tömör, m tömegű korongot pereméhez erősített $2R$ hosszúságú fonállal vízszintes síkon állandó sebességgel vontat egy kocsi, amelyhez a talajtól mért R magasságban erősítették a fonál másik végét. Egyensúly esetén mekkora szöget zár be a vízszintessel a fonál, ha*

a) *nincs súrlódás,*

b) *ha van?*

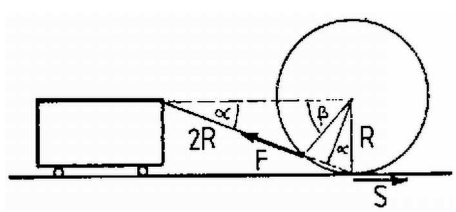
A korong tengelye merőleges a fonálra, valamint a sebességre.



(Holics László)

Megoldás. a) Egyensúly (egyenesvonalú, egyenletes haladómozgás) esetén az összes erők forgatónyomatékának összege 0 kell legyen. Ha nincs súrlódás, ez csak úgy teljesülhet, hogy induláskor, míg eléri az állandó sebességet a korong, a fonál egyenes, és meghosszabbítása illeszkedik a korong tengelyére (vagyis a tömegközéppontjára), tehát a fonál eddig vízszintes. Ettől kezdve azonban a kocsi akár csökkentheti is a sebességét, s a fonál meglazulva tetszőleges alakot vehet fel, a korong továbbra is egyenletesen halad. (Ilyen ideális eset azonban ténylegesen nem valósul meg, tehát a realitásnak csak a b) eset felel meg.)

b) Ha van súrlódás, annak forgatónyomatékát kompenzálnia kell a fonálerő forgatónyomatékának (a nehézségi erőnek és a kényszererőnek nincs a tömegközéppontra nézve forgatónyomatéka). Írjuk fel az erők forgatónyomatékait a talajjal érintkező, az inerciarendszerben egyenletesen mozgó pontra! Erre nézve sem az S súrlódási erőnek, sem a talaj által kifejtett kényszererőnek nincsen nyomatéka, így a fonálerő nyomatékának is zérusnak kell lennie. Ez csak úgy valósulhat meg, hogy a fonál meghosszabbítása átmegy a korongnak a talajjal érintkező pontján.



Az ábráról leolvasható, hogy a keresett hajlásszögre érvényes:

$$\sin\alpha = \frac{R}{2R + 2R\sin\alpha}.$$

Innen $\sin\alpha$-ra vegyes másodfokú egyenletet kapunk:

$$2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0,$$

ahonnan

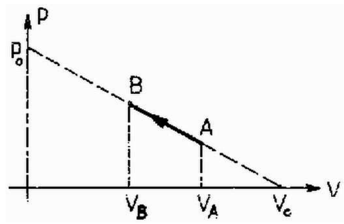
$$\sin\alpha = \frac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Innen a keresett hajlásszög:

$$\alpha = 21{,}47^\circ,$$

függetlenül a súrlódási együttható nagyságától. (Ez igen meglepő, ugyanis ha ily módon húzunk egy korongot akár ugrásszerűen változó súrlódású talajon, a fonálnak „meg sem szabad rezzennie”, állandóan 21,47°-ot kell bezárnia a vízszintessel. Ténylegesen elvégzett kísérletnél azonban a fonálban terjedő hatás sebességének véges volta miatt a korong berezegne, és nemegyensúlyi állapotain keresztül „föltornászná” – nem harmonikus – rezgéseit.)

2. *Az ábra $p(V)$ grafikonon mutatja egy bizonyos mennyiségű oxigéngáz állapotváltozását.*



Az ábrán szereplő V_0 térfogat és p_0 nyomás értékei: $V_0 = 12\ \mathrm{dm}^3$, $\mathrm{p}_0 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa. *A kezdeti* (A) *állapotban a gáz térfogata* $V_A = \dfrac{2}{3}V_0$, *hőmérséklete* $T_A = 300$ K. *A végső* (B) *állapotban* $V_B = \dfrac{5}{12}V_0$.

Határozza meg külön-külön, hogy mennyi hőt vesz fel, és mennyi hőt ad le a gáz a folyamatban!

(Szegedi Ervin)

I. megoldás. Az ábráról látható, hogy fennáll

$$\frac{p_A}{V_0 - V_A} = \frac{p_0}{V_0}, \quad \text{amiből} \quad p_A = \frac{V_0 - V_A}{V_0} p_0 = \frac{1}{3} p_0 = 0{,}4 \cdot 10^5\ \text{Pa},$$

hasonlóképpen

$$\frac{p_B}{V_0 - V_B} = \frac{p_0}{V_0}, \quad \text{amiből} \quad p_B = \frac{V_0 - V_B}{V_0} p_0 = \frac{7}{12} p_0 = 0{,}7 \cdot 10^5\ \text{Pa}.$$

A (B) állapotban a hőmérséklet:

$$\frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{p_B V_B}{T_B}, \quad \text{amiből} \quad T_B = \frac{p_B V_B}{p_A V_A} T_A = \frac{35}{32} T_A = 328{,}1\ \text{K}.$$

Az Nk szorzat a $p_A V_A = NkT_A$ összefüggés alapján

$$Nk = \frac{p_A V_A}{T_A} = \frac{2}{9}\frac{p_0 V_0}{T_A} = 1{,}067\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}. \tag{1}$$

A folyamat $p(V)$ függvénye:

$$p(V) = p_0 \left(1 - \frac{V}{V_0}\right). \tag{2}$$

A folyamat $T(V)$ függvénye (1) és (2) felhasználásával:

$$T(V) = \frac{p(V)V}{Nk} = \frac{9}{2} T_A \left(1 - \frac{V}{V_0}\right) V. \tag{3}$$

Jelölje $Q(V)$ azt a hőt, amit a gáz a környezetétől felvesz, miközben térfogata V_A-ról V-re változik. Határozzuk meg a $Q(V)$ függvényt!

Az I. főtétel szerint:

$$\Delta E(V_A \to V) = Q(V) + W(V_A \to V),$$

azaz

$$Q(V) = \Delta E(V_A \to V) - W(V_A \to V). \tag{4}$$

Az energiaváltozás (1) és (2) felhasználásával:

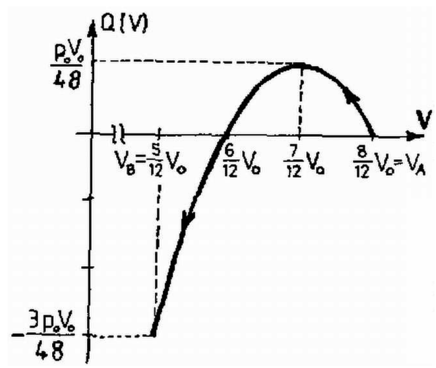
$$\Delta E(V_A \to V) = \frac{5}{2} Nk(T - T_A) = p_0 V_0 \left[\frac{5}{2}\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 - \frac{5}{9}\right]. \tag{5}$$

A gázon végzett munka (2) felhasználásával:

$$W(V_A \to V) = \frac{p_A + p}{2}(V - V_A) = -p_0 V_0 \left[\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 - \frac{4}{9}\right]. \tag{6}$$

A $Q(V)$ függvény tehát (4), (5) és (6) alapján:

$$Q(V) = p_0 V_0 \left[-3 \left(\frac{V}{V_0} \right)^2 + \frac{7}{2} \left(\frac{V}{V_0} \right) - 1 \right]. \tag{7}$$



A $Q(V)$ függvény alapján megállapíthatók a következők. Miközben a gázt kezdeti V_A térfogatáról fokozatosan összenyomjuk, a felvett hő növekszik, amíg a térfogat $7V_0/12$-re nem csökken. Eddig a gáz

$$Q_{\text{fel}} = Q\left(\frac{7}{12}V_0\right) = \frac{p_0V_0}{48} = 30 \text{ J hőt vesz fel.}$$

A $7V_0/12$ térfogatról tovább összenyomva a gázt, hőt ad le. A leadott hő:

$$Q(V_B) = Q\left(\frac{7}{12}V_0\right) + Q\left(\frac{7}{12}V_0 \to V_B\right),$$

azaz

$$-\frac{3p_0V_0}{48} = \frac{p_0V_0}{48} + Q\left(\frac{7}{12}V_0 \to V_B\right)$$

felhasználásával

$$Q\left(\frac{7}{12}V_0 \to V_B\right) = -\frac{1}{12}p_0V_0 = -120 \text{ J}.$$

A folyamatban tehát a gáz $Q_{\text{le}} = 120$ J hőt ad le.

II. megoldás. Azt, hogy mekkora térfogatig (V_x) van hőfelvétel, más úton is megkaphatjuk. A gáz a V_x térfogatig hőt vesz fel, de tovább összenyomva hőt ad le. Ez azt jelenti, hogy V_x kis környezetében gyakorlatilag sem hőfelvétel, sem hőleadás nincs. Pontosabban fogalmazva: a folyamat $p(V)$ függvényét a V_x pontban a gáz $[V_x, p(V_x)]$ ponton átmenő adiabatája *érinti*.

Egy tetszőleges (V, p) ponton átmenő adiabata meredekségére teljesül a következő:

$$p = c \cdot V^{-\kappa} \qquad (c = \text{állandó}),$$
$$\frac{dp}{dV} = -\kappa c V^{-\kappa-1} = -\kappa \frac{cV^{-\kappa}}{V},$$

tehát

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p}{V}. \tag{8}$$

A vizsgált folyamat $p(V)$ görbéje mentén V térfogatnál az adiabata meredeksége (8) és (2) felhasználásával:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\text{adiabata}} = -\kappa \frac{p_0}{V}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right). \tag{9}$$

A gáz $p(V)$ görbéjének meredeksége minden térfogatnál $-p_0/V_0$. A meredekségek egyenlőségéből (felhasználva, hogy oxigéngáz esetén $\kappa = 7/5$):

$$-\frac{7}{5}\frac{p_0}{V_x}\left(1 - \frac{V_x}{V_0}\right) = -\frac{p_0}{V_0},$$

amiből

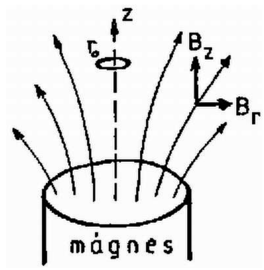
$$V_x = \frac{7}{12}V_0.$$

A megoldás innen azonos az előzővel.

3. *Egy vékony, elhanyagolható ellenállású ($R=0$) gyűrűt függőleges helyzetű, henger alakú rúdmágnes felett tartunk. A gyűrű tengelye egybeesik a mágnes tengelyével. A gyűrű körüli hengerszimmetrikus mágneses mező közelítőleg így jellemezhető a mágneses indukcióvektor függőleges és sugárirányú koordinátáival:*

$$B_z = B_0(1-\alpha z) \qquad \text{és} \qquad B_r = B_0\beta r,$$

ahol B_0, α, β állandók, továbbá z és *r függőleges, illetve sugárirányú helykoordináták.*



Elengedés után a gyűrű lefelé kezd mozogni, miközben függőleges tengelyét megtartja. Az elengedés pillanatában a gyűrűben nem folyik áram.

a) *Vizsgáljuk meg, hogy mozgás közben a gyűrű belsejében időben állandó-e a mágneses fluxus!*

b) *Milyen mozgást végez a gyűrű? Határozzuk meg a gyűrű függőleges koordinátájának időfüggését!*

c) *Hogyan függ a gyűrűben folyó áram az időtől a mozgás során? Határozzuk meg az áram maximális értékét!*

(A gyűrű középpontjainak kezdeti koordinátái legyenek $z=0$ és $r=0$. A mozgás leírásakor hanyagoljuk el a légellenállást!)

Adatok: $B_0 = 0{,}01$ T, $\alpha = 2\beta = 32\ \mathrm{m}^{-1}$, *a gyűrű tömege* $m = 50$ mg, *a gyűrű önindukciós együtthatója* $L = 1{,}3\cdot 10^{-8}$ H, *a gyűrű sugara* $r_0 = 0{,}5$ cm, *a nehézségi gyorsulás* $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

(Honyek Gyula)

Megoldás. a) A mágneses fluxusváltozás elektromotoros erőt indukál, ami áramot kelt:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = RI, \qquad \text{ahol} \qquad \Phi = B_z\cdot r_0^2\pi + LI.$$

Mivel a körvezető ellenállása $R=0$, így az eredő elektromotoros erőnek is zérusnak kell lennie: $\varepsilon = 0$, vagyis a Φ mágneses fluxus állandó:

(1)
$$\Phi = B_0(1-\alpha z)r_0^2\pi + LI = \text{állandó}.$$

A kezdeti feltételeket ($z=0,\ I=0$) figyelembe véve, az állandó értéke:

(2)
$$\Phi = B_0 r_0^2\pi.$$

b) Az (1) és (2) egyenletek alapján a kialakuló áram erőssége

(3)
$$I = \frac{1}{L}B_0\alpha r_0^2\pi z.$$

Az áramjárta gyűrűre a külső mágneses mező erőt fejt ki:

$$F_z = -B_r\cdot I(z)\cdot 2r_0\pi = -B_0\beta r_0\cdot\frac{B_0\alpha r_0^2\pi}{L}\cdot 2r_0\pi\cdot z = -kz,$$

így a gyűrű mozgásegyenlete:

(4)
$$ma_z = F_z - mg = -kz - mg,$$

ahol

$$k = \frac{2B_0^2\alpha\beta r_0^4\pi^2}{L},$$

tehát a gyűrű *harmonikus rezgőmozgást* végez.

A kezdeti feltételeket figyelembe véve a gyűrű mozgását a

(5)
$$z(t) = A(\cos\omega t - 1)$$

egyenlet írja le, ahol a körfrekvencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \pi r_0^2 B_0 \sqrt{\frac{2\alpha\beta}{mL}}.$$

Az egyensúlyi helyzetet ($a_z = 0$), ill. az A amplitúdót a (4) egyenlet alapján határozzuk meg:

$$z_0 = -A = -\frac{mg}{k} = -\frac{mgL}{2B_0^2\alpha\beta r_0^4\pi^2}. \tag{6}$$

Numerikusan: $\omega = 31{,}2\ \mathrm{s}^{-1}$ és $A = 1$ cm.

c) Ha a (3) egyenletbe behelyettesítjük az (5) kifejezést, akkor megkapjuk az áram időfüggését:

$$I(t) = \frac{B_0\alpha r_0^2\pi}{L} \cdot A(\cos\omega t - 1),$$

ill. az amplitúdó (6) kifejezését behelyettesítve:

$$I(t) = \frac{mg}{2\pi r_0^2 B_0\beta}(\cos\omega t - 1),$$

amiből az áram erősségének maximális értéke:

$$I_{\max} = \frac{mg}{\pi r_0^2 B_0\beta}.$$

Numerikusan: $I_{\max} = 39$ A.