A KöMaL 1991. évi 6. számában közültük az alábbi (pontversenyen kívüli) feladatot:

Négy azonos tömegű pontszerű testet azonos hosszúságú fonalak segítségével zárt, rombusz alakú láncba fűzünk, és a láncot egy ω szögsebességgel forgó légpárnás asztalra helyezzük:

a) Hogyan fog mozogni a négy test, ha kezdetben a forgó asztalhoz képest nyugalomban voltak, a rendszer tömegközéppontja a forgástengelyen helyezkedett el, és a rombusz egyik szöge α volt?

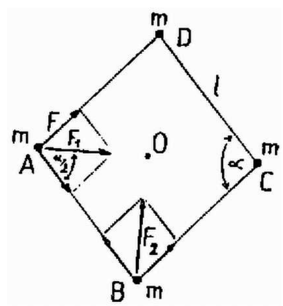
b) Hogyan mozog a rendszer, ha kezdetben a tömegközéppontja állt, és a forgó rendszerből nézve a két legközelebbi test egymás felé mozgott v_0 kezdősebességgel?

c) Írjuk le a rendszer legáltalánosabb mozgását mind az álló, mind pedig az ω szögsebességgel forgó koordinátarendszerből nézve!

(Feltételezhetjük, hogy a súrlódás elhanyagolható, és a fonalak mindvégig feszesek. A mozgást csak a testek összeütközéséig kell követnünk.)

Megoldás. Legyen a testek tömege egyenként m, a fonalak hosszúsága l, a testeket jelöljük A, B, C és D betűkkel, tegyük fel továbbá, hogy az asztal vízszintes és $0° < \alpha < 180°$.

a) A testekre ható gravitációs erő és az asztal tartóereje kiegyenlítik egymást, ezért mondhatjuk azt, hogy a testekre csak a fonálerők hatnak. A szimmetria miatt az F fonálerők egyenlőek, ezért egy kiszemelt testre ható fonálerők eredője mindig az O tömegközéppont felé mutat. Az eredő erő nagysága az A és C testek esetében: $F_1 = 2F\cos(\alpha/2)$; a B és a D test esetében: $F_2 = 2F\sin(\alpha/2)$ (*1. ábra*).

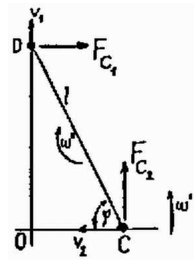


1. ábra

A *kezdő pillanatban* a testek sebessége a forgó rendszerben zérus, így nem lép fel a Coriolis-erő. Tegyük fel, hogy $2F\cos\dfrac{\alpha}{2} = F_1 > m\left(l\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\omega^2$. Ekkor az A és C testek az O tömegközéppont felé kezdenek gyorsulni, a másik két test – a fonalak feszességéből adódóan – nyílván a $\overrightarrow{BO}$, ill. a $\overrightarrow{DO}$ vektorokkal ellentétes irányban fog gyorsulni, aminek feltétele, hogy $F_2 = 2F\sin\dfrac{\alpha}{2} < m\left(l\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\omega^2$ legyen. A két egyenlőtlenségből a következő ellentmondásra jutunk: $\dfrac{1}{2}ml\omega^2 < F < \dfrac{1}{2}ml\omega^2$; ezért feltételezésünk *rossz* volt. Hasonlóan juthatunk ellentmondásra akkor is, ha feltételezzük, hogy $2F\cos\dfrac{\alpha}{2} = F_1 < m\left(l\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\omega^2$, ezért csak a következő eset valósulhat meg: $F_1 = m\left(l\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)\omega^2$ és $F_2 = m\left(l\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\omega^2$. A testek gyorsulása a forgó rendszerből nézve zérus; a testek tehát mindvégig mozdulatlanok maradnak. Példaként: az A test helykoordinátái az ω szögsebességgel forgó koordinátarendszerben: $x_A(t) = -l\cos(\alpha/2)$; $y_A(t) = 0$. Az álló koordináta-rendszerből (inerciarendszerből) nézve mindegyik test egyenletes körmozgást végez ω szögsebességgel az O tömegközéppont körül. Példaként az A test helykoordinátái:

$$x_A(t) = l\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos(\omega t + \pi); \qquad y_A(t) = l\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin(\omega t + \pi).$$

b) Legyen α a rombusz kisebbik szöge; tehát $0° < \alpha \le 90°$. A feladat szövege szerint a fonalak mindvégig feszesek maradnak. Az O tömegközéppont – a rombusz egymásra merőleges átlóinak metszéspontja és egyben forgástengely – a mozgás során nem mozdul el. Képzeljük el a mozgást úgy, hogy a fonállal összekötött testek két egymásra merőleges, elhanyagolható tömegű, mereven összeerősített rúdra vannak felfűzve, és rajtuk súrlódásmentesen csúszhatnak, rájuk merőlegesen erőt fejthetnek ki. A fonalak mindig feszesek és rombuszt alkotnak, ezért ezekkel a rudakkal kiegészítve a rendszer pontosan úgy fog mozogni, mint ahogy nélkülük mozogna. Tegyük fel, hogy a mozgás egy pillanatában a rudazat a testekkel együtt valamilyen ω' szögsebességgel forog az álló koordináta-rendszerhez képest, a rudakhoz képest a feszes fonalak $(\pm)\omega''$ szögsebességgel forognak és φ, illetve $90° - \varphi$ szöget zárnak be a rudakkal. (A *2. ábrán* egy kiszemelt fonál látható.)



2. ábra

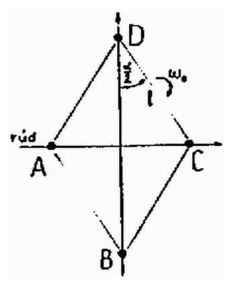
Természetesen a fonalak nemcsak forgó, hanem haladó mozgást is végeznek az ω' szögsebességgel forgó – rudakhoz rögzített – koordináta-rendszerben. Amint látni fogjuk, a megoldás szempontjából célszerű ezzel az ω'' szögsebességgel kifejezni a testek sebességét. Így a D test sebessége: $v_1 = l\omega'' \cos\varphi$, ugyanis ha a C testet rögzítenénk, akkor az ω'' pillanatnyi szögsebességű körmozgást végző D test sebességének OD irányú vetülete $l\omega'' \cos\varphi$ lenne. (S mivel a C pont mozgása OD-re merőleges, a D pont sebessége nem rögzített C esetén is v_1 kell legyen.) Hasonlóan a C test sebessége: $v_2 = l\omega'' \sin\varphi$.

Vajon állandó-e időben az ω' szögsebesség? A sugár irányban v sebességgel mozgó testek egy ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerben $F_C = 2mv\omega$ tehetetlenségi erőt fejtenek ki, ez a Coriolis-erő. Nézzük meg, van-e ezeknek az erőknek forgatónyomatéka O pontra nézve! A C és D testek sugárirányú sebességéből származó F_{C_1} és F_{C_2} Coriolis-erők okozta, rudazatra ható forgatónyomatékok összege:

$$\sum M = M_1 + M_2 = F_{C_1} \cdot l\sin\varphi - F_{C_2} \cdot l\cos\varphi = 2m\omega' v_1 \cdot l\sin\varphi - 2m\omega' v_2 \cdot l\cos\varphi =$$

$$= 2ml\omega'(l\omega'' \sin\varphi \cdot l\cos\varphi - l\omega'' \sin\varphi \cdot l\cos\varphi) = 0.$$

Az A és B testekre ható Coriolis-erők okozta forgatónyomatékok is kiejtik egymást, tehát a rudakra ható eredő forgatónyomaték ω'-től és ω''-től (vagyis a testek sebességétől) függetlenül zérus. Ez azt jelenti, hogy a rudazat kezdeti ω szögsebessége a mozgás során nem változik meg, *állandó marad:* $\omega' \equiv \omega$.



3. ábra

A fent említett (ω'') „fonálszögsebesség” kezdetben ω_0 volt (*3.ábra*): $v_0 = l\omega_0 \sin\dfrac{\alpha}{2}$-ből kapjuk: $\omega_0 = \dfrac{v_0}{l \cdot \sin(\alpha/2)}$. Tegyük fel, hogy a mozgás egy pillanatában a fonalak szögsebességének nagysága ω'' és a rombusz egyik szöge φ. Ekkor a rendszer összes mozgásienergiája (a zárójelben a kétféle forgásból származó sebességek négyzetei találhatók):

$$E_{\text{összes}} = 2 \cdot \frac{1}{2} m \left(l^2 \cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot \omega^2 + l^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \omega^2 + l^2\omega''^2 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2} + l^2\omega''^2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} \right) =$$
$$= ml^2 \cdot (\omega^2 + \omega''^2).$$

Mivel mind az összenergia, mind ω állandó, ezért a fonalak ω'' szögsebessége is *állandó* (!), nagysága pedig: $\omega'' = \omega_0 = \dfrac{v_0}{l \cdot \sin(\alpha/2)}$.

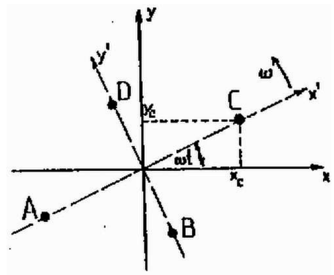
Ezek után már könnyen felírhatók a testek helykoordinátái az idő függvényében. Szemeljük ki például a C testet! Összeütközésig a rombusz félszöge az

$$\frac{\alpha'}{2}(t) = \frac{\alpha}{2} + \omega_0 t = \frac{v_0}{l \cdot \sin(\alpha/2)} t + \frac{\alpha}{2}$$

képlet szerint, a C test egyik koordinátája az ω szögsebességgel forgó $(x',\ y')$ *koordináta-rendszerben*

$$x'_C(t) = l \cdot \sin\left[\frac{\alpha'}{2}(t)\right] = l \cdot \sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\alpha/2)} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

képlet szerint változik, vagyis a test harmonikus rezgőmozgást végez ($y'_C(t) = 0$). (Ez hasonlóan megmutatható a többi testnél is.) Érdekes, hogy a rezgőmozgás ω_0 körfrekvenciája a v_0 kezdeti sebességtől függ, tehát változtatni lehet az értékét.



4. ábra

Az *álló* (x, y) koordináta-rendszerből nézve a testek egy ω szögsebességű egyenletes körmozgásból és egy harmonikus rezgőmozgásból összetett mozgást végeznek. A C test helykoordinátái tehát (*4. ábra*):

$$x_C(t) = x'_C(t) \cdot \cos(\omega t) = l \cdot \sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\alpha/2)} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos(\omega t);$$

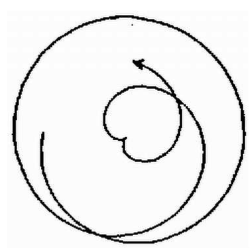
$$y_C(t) = x'_C(t) \cdot \sin(\omega t) = l \cdot \sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\alpha/2)} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin(\omega t).$$

A többi testnél is hasonlóan írhatók fel a helykoordináták.

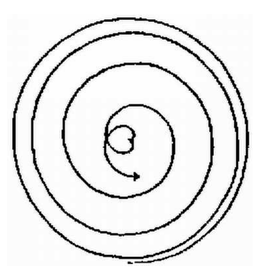
Az egymáshoz közeledő testek idővel összeütköznek. Ha az ütközést igen gyorsnak és tökéletesen rugalmasnak tételezzük fel, akkor a fenti képletek kis változtatással érvényesek maradnak a mozgás egészére – az ütközés(ek) után is:

$$x_C(t) = l \cdot \cos(\omega t) \cdot \left|\sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})} + \frac{\alpha}{2}\right)\right|; \; y_C(t) = l \cdot \sin(\omega t) \cdot \left|\sin\left(\frac{v_0 t}{l \cdot \sin(\frac{\alpha}{2})} + \frac{\alpha}{2}\right)\right|.$$

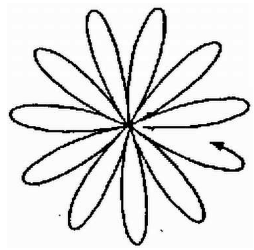
Egy kiszemelt test néhány lehetséges pályájának számítógéppel készített rajzát az *5–7. ábrák* mutatják.



5. ábra



6. ábra



7. ábra

Veres Gábor (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., III. o. t.)