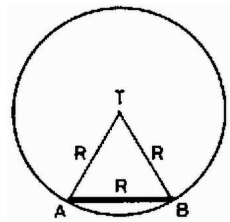
1991 október 18-án rendezte az Eötvös Loránd Fizikai Társulat a 68. Eötvös versenyt Budapesten és 12 vidéki városban. A budapesti verseny jól illeszkedett a centenáriumi ünnepségsorozathoz: a versenyre érkező diákok megtekinthették az aznap délelőtt megnyitott poszterkiállítást is.

A szokásos 5 óra megoldási idő alatt ebben az évben is három feladatot kellett megoldaniuk a versenyzőknek.

Az alábbiakban ismertetjük a feladatokat, s a feladatok megoldásait.

1. *Egy rögzített T tengely körül könnyen forgó R sugarú mókuskerékbe R hosszúságú létrát szereltünk. Egy olyan pillanatban, amikor a kerék éppen nyugalomban van és a létra vízszintes, a mókus elindul az A pontból, és úgy fut át a létrán a B pontba, hogy közben a kerék mozdulatlan marad (1. ábra).*

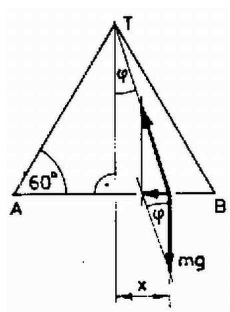


1. ábra

Hogyan kell a mókusnak mozognia? Mennyi idő alatt futott át a létrán?

Megoldás. A kerék akkor marad mozdulatlan, ha a kerékre ható erők és forgatónyomatékok eredője egyaránt zérus marad, miközben a mókus végigfut a létrán. Az erők eredőjének zérus voltát a rögzített tengely biztosítja. Ha pedig *a mókus által a létrára* kifejtett erő hatásvonala átmegy a T tengelyen, akkor az *eredő* forgatónyomaték is zérus marad. Newton III. törvénye értelmében ekkor *a létra által a mókusra* kifejtett erőnek is olyan irányúnak kell lennie, hogy hatásvonala menjen át a tengelyen. Ez az erő két erő eredőjeként adódik: egyik a függőlegesen felfelé irányuló nyomóerő, másik pedig vízszintes súrlódási erő, amely a mókus gyorsulásának irányába mutat. A mókusra ható erők eredőjének nagysága (2. ábra):

$$\left|\sum \mathbf{F}\right| = mg\,\mathrm{tg}\ \varphi.$$



2. ábra

A mókus helyzetét a 2. ábrán látható φ szög helyett a létra közepétől mért x távolsággal is megadhatjuk:

$$\mathrm{tg}\ \varphi = \frac{x}{R\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

mivel a szabályos háromszög oldala R hosszúságú. Ha x előjeles távolságot („helykoordinátát") jelent, akkor a dinamika felírt alaptörvényéből előjelesen is helyesen következik:

$$ma = mg\frac{-x}{R\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$a = -\frac{2g}{R\sqrt{3}}x.$$

A kitéréssel arányos nagyságú, de ellentétes irányú gyorsulása a harmonikus rezgőmozgást végző testnek van, vagyis *a mókusnak úgy kell futnia, hogy mozgása harmonikus rezgőmozgás legyen.* Ilyenkor

$$a = -\omega^2 x, \quad \text{vagyis} \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R\sqrt{3}}}.$$

A kitérés időfüggvénye:

$$x = -\frac{R}{2}\cos\sqrt{\frac{2g}{R\sqrt{3}}}\ t.$$

Az A-ból B-be való átfutás egy „félrezgésnek” felel meg, az ehhez szükséges idő:

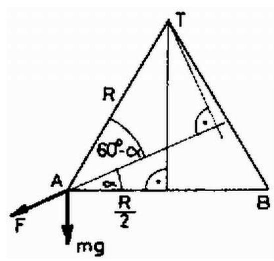
$$\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R\sqrt{3}}{2g}}.$$

Megjegyzés. A feladatot Ciolkovszkijnak egyik ötlete inspirálta. Ő maga középiskolai tanár volt, s egyszer az alábbi feladatot adta:

„Hogyan kell egy bogárnak végigmásznia egy falhoz támasztott szalmaszálon, hogy ne csússzék el a szalmaszál, annak ellenére, hogy se a falnál, se a talajnál nincs súrlódás?”

Meglepő ötlettel állt elő az egyik versenyző a mostani Eötvös versenyen: legyen a létra végtelen nagy tömegű a mókushoz képest, akkor a mókus nyugodtan végigsétálhat rajta (ahogy egy légy is végigmászhat a létrán) anélkül, hogy mérhető módon megmozdulna a kerék ...

Többen kísérleteztek azzal az ötlettel is, nem tud-e átugorni a mókus A-ból B-be úgy, hogy közben ne mozduljon meg a kerék. Úgy gondolták, hogy a kerék érintőjére merőlegesen kell elugrani A-ból, és a B-beli érintőre merőlegesen kell megérkezni a B pontba. Azután gyorsan kiszállni a kerékből ...



3. ábra

Nézzük meg ennek az „ugró mókusnak” az esetét kissé alaposabban!

Tegyük fel, hogy az elugró mókust τ ideig állandó F erő gyorsítja fel 0-ról v sebességre az A pontban, majd ugyanekkora, megfelelő erő fékezi le B-ben (3. ábra). Jelöljük α-val az elugrás v sebességének a vízszintessel bezárt szögét! Ekkor az A pontban a kerékre két erő hat: függőlegesen lefelé egy mg nagyságú erő, a sebességgel ellentétes irányban pedig F. A két erő ellentétes forgató hatást fejt ki a kerékre, s az egyensúly feltétele:

$$FR\cdot\sin(60^\circ-\alpha) = mg\frac{R}{2}.$$

Az F erő $F\cdot\tau$ nagyságú impulzusa (erőlökése) ad a mókusnak mv nagyságú lendületet:

$$F\tau = mv.$$

Ezt felhasználva, az előző egyenletből kapjuk

$$\frac{mv}{\tau}R\sin(60^\circ-\alpha) = mg\frac{R}{2},$$
$$2v\cdot\sin(60^\circ-\alpha) = g\tau.$$

Kifejtve $\sin(60^\circ-\alpha)$ értékét:

$$\sqrt{3}v\cos\alpha - v\sin\alpha = g\tau.$$

Ha a mókus t ideig van a levegőben repülés közben, akkor

$$v\cos\alpha = \frac{R}{t},\quad \text{illetve}\quad v\sin\alpha = g\frac{t}{2},$$

így t-re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$t^2 + 2\tau t - 2\sqrt{3}\frac{R}{g} = 0.$$

Ezt megoldva, a keresett $t+\tau$ időre kapjuk:

$$t+\tau = \sqrt{\tau^2 + \frac{2\sqrt{3}R}{g}}.$$

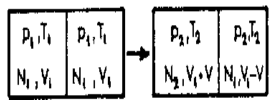
Sem a végtelen nagy tömegű mókuslétra, sem az ugró mókus nem felel meg a feladat feltételeinek, csupán azért idéztük fel őket, hogy illusztráljuk a versenyzők találékonyságát, kifogyhatatlan ötleteit. Szerencsére ötvennél is több versenyzőnek volt igazán helyes megoldása erre a feladatra.

2. *Egy zárt hengert könnyen mozgó, jól záró dugattyú oszt két részre. Kezdetben a dugattyú középen áll. Mindkét oldalon* 1 dm^3 *térfogatú,* 10^5 Pa *nyomású,* 0 °C *hőmérsékletű levegő van, a bal oldali részben ezen kívül még egy* 2 g *tömegű jégdarabka is található.*

A rendszert lassan 100 °C*-ra melegítjük. Hol fog elhelyezkedni a dugattyú?*

Megoldás. 100 °C-on a bal oldalon már nem lesz jég, hanem víz és vízgőz keveréke, esetleg már csak vízgőz, ha minden víz elpárolgott. (Ezt még külön meg kell vizsgálnunk!)

Jelöljük $N_{\text{gőz}}$-zel a gőzállapotban lévő H_2O molekulák számát a bal oldalon, a 100 °C-os végállapotban. Mivel ezen az oldalon megnőtt a molekulák száma, a dugattyúnak is el kellett mozdulnia jobbra. Jelöljük V-vel a térfogat növekedését a bal oldalon, ugyanennyivel csökken a térfogat a jobb oldalon (4. ábra).



4. ábra

Az állapotjelzők kezdetben mindkét oldalon a következők:

$$p_1 = 10^5 \text{ Pa}; \quad T_1 = 273 \text{ K}; \quad V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3.$$

A végállapotban a bal oldalon

$$p_2 = ? \quad T_2 = 373 \text{ K}; \quad V_2' = V_1 + V.$$

A végállapotban a jobb oldalon

$$p_2 = ? \quad T_1 = 373 \text{ K}; \quad V_2'' = V_1 - V.$$

A gázmolekulák száma kezdetben mindkét oldalon

$$N_1 = \frac{p_1 V_1}{k T_1}.$$

A végállapotban a jobb oldalon marad ugyanennyi, a bal oldalon viszont megnő a molekulák száma:

$$N_2 = N_1 + N_{\text{gőz}}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy mekkora lehet $N_{\text{gőz}}$? Teljesen elpárologhat-e a felolvadt összes jég? Számítsuk ki, hogy 2 g vízgőz mekkora térfogatot tölt be 373 K hőmérsékleten, s az ennek megfelelő 101 324 Pa nyomáson! Ideális gáz közelítést alkalmazva:

$$Nk\frac{T}{p} = \frac{2}{18} 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{373}{101\ 324} \text{ m}^3 = 3{,}4 \text{ dm}^3.$$

Hasonló értéket kapunk akkor is, ha a 100 °C-os vízgőz sűrűségének mért és táblázatban megadott értékével számolunk.

A rendelkezésre álló térfogat viszont legfeljebb 2 dm^3 lehet! Ebből következik, hogy a víz nem párolog el teljesen a bal oldalon.

Mennyi párolog el? Ez V-től is függ:

$$p_{\text{telítési}} \cdot (V_1 + V) = N_{\text{gőz}} k T_2.$$

$$T_2 = 373 \text{ K} \quad \text{esetén vízre} \quad p_{\text{telítési}} = 101\ 324 \text{ Pa}.$$

V és $N_{\text{gőz}}$ között még egy összefüggésre van szükségünk. Ehhez azt használjuk fel, hogy a végállapotban a két oldalon azonos a nyomás és a hőmérséklet, vagyis a térfogatok aránya egyenlő a gázmolekulák számának arányával:

$$\frac{V_1 + V}{V_1 - V} = \frac{N_1 + N_{\text{göz}}}{N_1}.$$

A két egyenletbe az ismert adatokat behelyettesítve V és $N_{\text{gőz}}$ értéke meghatározható. A megoldás:

$$V = 0{,}33 \text{ dm}^3,$$

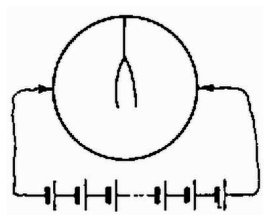
vagyis a bal oldalon 1,33 dm^3, a jobb oldalon 0,67 dm^3 térfogat alakul ki, így fog elhelyezkedni a dugattyú.

Érdekes, hogy $N_{gőz} \approx N_1$, $N_2 \approx 2N_1$, $p_2 \approx 2p_1$ adódik, ami annak következménye, hogy a levegő nyomása gyakorlatilag ugyanakkora volt a kezdőállapotban, mint a H_2O telítési nyomása a végállapot hőmérsékletén.

Megjegyzés. A feladat megoldásának kulcsa a vízgőzre vonatkozó állapotegyenlet helyes felírása. Sok hibás megoldás abból keletkezett, hogy az összes víz elpárologását feltételezve határozták meg $N_{gőz}$-t. Mások viszont ezzel ellentétben azt állították, hogy egyetlen molekula sem fog a vízből elpárologni, mert a víz nem fog felforrni. Az egyetlen jogos ellenvetés, amit a fenti megoldással szemben tehetünk az az, hogy alkalmazhatjuk-e az ideális gáz közelítést a 100°C-os vízgőzre? A válasz az, hogy alkalmazhatjuk! Valóban jó közelítés ez, amint arról bárki meggyőződhet, ha fellapoz egy vízgőztáblázatot.

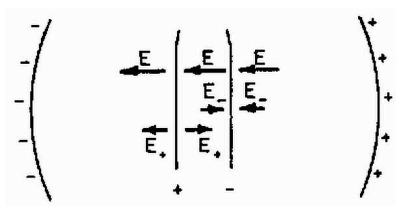
3. *Fémből készült, igen vékony falú, zárt gömbhéj belsejében fonálon egy kétrét hajtott alufóliacsík függ. A gömb két átellenes pontjára kívülről az ábrán látható módon feszültséget kapcsolunk (5. ábra).*

Megmozdul-e az alufóliacsík, s ha igen, hogyan?



5. ábra

Megoldás. A vékony gömbhéj ellenállása nem hanyagolható el. Lesz elektromos mező a gömb belsejében, mégpedig forgásszimmetrikus abban az esetben, ha a gömb belül üres. (A szimmetriatengely a csatlakozási pontokat összekötő átmérő.)



6. ábra

Ha a gömb közepén ott van a kettéhajtott alufólia, akkor ezen megosztás jön létre azért, hogy a fólia ekvipotenciális legyen. A megosztott töltések tere kioltja a gömb belső terét a fólia két ága között (6. ábra).

A fólia bármely ágára a külső E térerősség és a másik ágból származó (E-nél kisebb) térerősség hat, vagyis a fóliaágra a külső tér van nagyobb hatással.

Ezért a kettéhajlott fólia *kinyílik,* és egy olyan helyzetben állapodik meg, amikor már a rá ható elektromos, gravitációs stb. erők és forgatónyomatékok eredője egyaránt zérus.

Megjegyzés. Az összeállítás emlékeztet a „Faraday-kalitkára”, ezért sok versenyző úgy gondolta, hogy nem lehet a gömb belsejében elektromos mező. Elfelejtették, hogy ez csak elektrosztatikában igaz, amikor a fém felülete ekvipotenciális. Most a fémen áram folyik, ezért a fémgömb különböző pontjai között általában van feszültség s így van – nemcsak benne, de körülötte is – elektromos mező. Ha valami, akkor a kétrét hajtott fóliaág képezhet ebben a feladatban Faraday-kalitkát, és e „kalitkának” a belsejében kell, hogy a térerősség közel zérus legyen.

Ennek a feladatnak a helyes megoldására már csak két versenyző jött rá. Mivel ők az első két feladatot is jól megoldották, nem volt nehéz dolga a Versenybizottságnak, amikor az 1991. évi Eötvös verseny két első helyezettjét kellett kiválasztania.

Az **I. díjat** egyenlő arányban megosztva nyerte *BODOR ANDRÁS*, az ELTE I. éves fizikus hallgatója, aki az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumban érettségizett, mint *Zsigri Ferenc* tanítványa, és *KÁLI SZABOLCS*, az ELTE I. éves fizikus hallgatója, aki Budapesten a Fazekas Mihály Gimnáziumban érettségizett, mint *Horváth Gábor* tanítványa.

A két elsődíjas versenyző egyenként ötezer forint pénzjutalomban részesült.

A **II. és III. díjat** a Versenybizottság összevonta és egyenlő arányban megosztotta a következő nyolc versenyző között:

EGYEDI PÉTER, a BME I. éves villamosmérnök hallgatója, aki Pécsett a Leöwey Klára Gimnáziumban érettségizett, mint *Csikós Istvánné* és *Kotek László* tanítványa; *GEFFERTH ANDRÁS*, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium III. osztályos tanulója, *Tóth László* és *Horváth Gábor* tanítványa; *KATZ SÁNDOR*, a bonyhádi Petőfi Sándor Gimnázium III. osztályos tanulója, *Erdélyesi János* tanítványa; *KŐSZEGI BOTOND*, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium

IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa; *MIKLÓS GYÖRGY*, a BME I. éves villamosmérnök hallgatója, aki Budapesten a Szt. István Gimnáziumban érettségizett, mint *Kovács István* tanítványa; *NAGY BENEDEK*, a KLTE I. éves fizikus hallgatója, aki Debrecenben a KLTE Gyakorló Gimnáziumban érettségizett, mint *Dudics Pál* tanítványa; *RÓZSA BALÁZS*, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváthné Dvorák Cecília* tanítványa és *SZENDRŐI BALÁZS*, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa.

A fenti nyolc versenyző egyenlő helyezésben a verseny 3 – 10. helyezettje, pénzjutalmuk ezer-ezer forint.

Dicséretet és ötszáz–ötszáz forint jutalmat kapott az alábbi hat versenyző: *ÁLMOS ATTILA*, a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnázium IV osztályos tanulója, *Istók Katalin* tanítványa; *BONCZ ANDRÁS*, az ELTE I. éves matematikus hallgatója, aki Zalaegerszegen a Zrínyi Miklós Gimnáziumban érettségizett, mint *Pálovics Róbert* tanítványa; *EGEDI PÉTER*, a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Mike János* tanítványa; *NAGY GYULA*, a jászberényi Erősáramú Szakközépiskola IV. osztályos tanulója, *Bakki Árpád* tanítványa; *NEMES NORBERT MARCELL*, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium IV. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa és *SOMLAI ÁKOS*, a BME I. éves villamosmérnök hallgatója, aki Pécsett a Nagy Lajos Gimnáziumban érettségizett, mint *Orovicza Márkné* tanítványa.

További helyezéseket a Versenybizottság nem állapított meg.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre 1991. november 29-én délután került sor az ELTE Főépületének fizikai előadótermében, ahol a fennállásának századik évfordulóját ünneplő Társulat egyik alelnöke adta át a díjakat és a Társulat által felajánlott pénzjutalmat. A nyertes versenyzők és tanáraik, valamint az érdeklődő hallgatóság a harmadik feladathoz kapcsolódó kísérletsorozattal győződhettek meg ugyanitt a már kikövetkeztetett megoldás helyességéről.