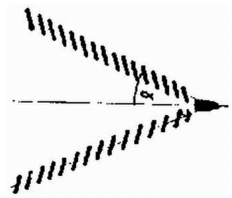
A vízhullámok[1]

Ha egy test (vadkacsa, motorcsónak, tartályhajó) állandó sebességgel mozog a víz felszínén, az általa keltett vízhullámok jellegzetes, ék alakú mintázatban követik a hullámforrást. A hullámkép meglehetősen összetett, az ék két szárát madártollra emlékeztető kis hullámok alkotják *(1.ábra)*.



1. ábra

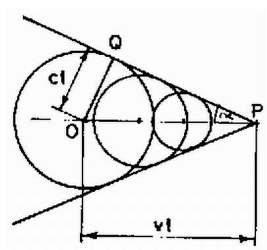
Vajon hogyan függ az ék α-val jelölt félnyílásszöge a hullámforrás sebességétől? Ezt a kérdést tanulmányozhatjuk kísérleti eszközökkel (lásd a 137. mérési feladat megoldását lapunk 94. oldalán), vagy megpróbálhatjuk elméleti megfontolásokkal „kitalálni" α értékét. (Természetesen ez utóbbi esetben össze kell vetnünk megfontolásaink eredményét a kísérleti tényekkel.)

Hangrobbanás, Cserenkov sugárzás

Első – legtermészetesebb – gondolatunk az lehet, hogy a vízhullámok kúpszöge is a hangtanból ismerős módon származtatható. Ha egy hangforrás (például egy repülőgép) a c hangsebességet meghaladó v sebességgel mozog, a különböző időpillanatokban keltett hullámainak burkolófelülete egy kúp lesz, melynek fél-nyílásszögét a

(1) $$\sin\alpha = \frac{c}{v}$$

képletből kaphatjuk meg *(2.ábra)*. A hangrobbanás egyik fajtájának jelenségét éppen akkor észleljük, amikor a QP hullámfront eléri a megfigyelő személyt.



2. ábra

Érdekes megjegyezni, hogy a hangrobbanásnak megfelelő jelenség a fénynél is megfigyelhető minden olyan esetben, amikor egy fényforrás a fénysebességnél nagyobb sebességgel mozog. Hát ez meg hogyan lehetséges? – kérdezhetjük. Nem a fénysebesség a létező legnagyobb sebesség a természetben? De igen, a *vákuumbeli* fénysebesség a határsebesség, ennek értéke $c_0 = 300\ 000$ km/s. Anyagokban (üvegben, vízben, átlátszó kristályokban) azonban a fény lassabban terjed, csupán $c = c_0/n$ sebességgel, ahol n az anyag törésmutatója. Vízre például $n = 4/3$, a fény tehát a vízben csak $c = 225\ 000$ km/s sebességgel „halad". Ha egy elektromosan töltött atomi részecske (elektron, pozitron, proton, α-részecske) mondjuk $v = 250\ 000$ km/s sebességgel halad át a vizen, „fényrobbanás" jelensége lép fel, s a „fénykúp" szögét a hangrobbanáshoz hasonlóan az (1) összefüggésből számolhatjuk ki. Ezt a jelenséget felfedezőjéről *Cserenkov-sugárzásnak* nevezték el, és manapság kiterjedten alkalmazzák elemi részecskék sebességének mérésénél.

Dimenzióanalízis – meglepő eredménnyel

Térjünk most vissza a vízhullámokhoz! Vajon megmagyarázható-e a vizen mozgó test által keltett hullámkép is az előzőek mintájára? *Nem*! A táblázatokban hiába keressük a vízhullámok terjedési sebességét, ilyen adatot nem találunk, mégpedig azért, mert a vízhullámok terjedése nem írható le egyetlen sebesség-adattal. A hangtól és a fénytől eltérően a vízhullámok sebessége erősen függ attól, hogy milyen hullámhosszúságú hullámok terjedéséről van szó. Ez a *diszperzió* jelensége, ami kismértékben a fény terjedésénél is fellép (hiszen az anyagok törésmutatója általában függ a fény színétől, tehát a frekvenciájától, a hullámhosszától), a vízhullámoknál azonban sokkal lényegesebb, meghatározó

[1] Előadás az 1992. évi Téli Fizikai Ankéton

szerepet játszik. Az is mutatja a víz és a hanghullámok különbözőségét, hogy a *2. ábrán* látható kúpképződés esetén a hullámfront (például a hullámhegyek pillanatnyi helyzetét jelző vonal) a PQ egyenessel párhuzamos lenne, nem pedig a kísérletileg jól megfigyelhető madártoll-mintázat *(1.ábra)*. A „csónakhullámok” magyarázatát tehát máshol kell keresnünk!

Induljunk el egészen más úton, próbáljuk meg a „dimenzióanalízis”, vagyis a mértékegységek tanulmányozása segítségével kitalálni, hogyan függhet α nagysága a v sebességtől. Vajon milyen adatok, paraméterek határozzák meg α értékét? Nyilván függhet a szög a g nehézségi gyorsulástól, valamint a víz ϱ sűrűségétől, hiszen ezek együtt felelősek a „kidomborodó” vízfelületet visszahúzó erőkért, vagyis a vízhullámok kialakulásáért. Elvben szerepet játszhat még a felületi feszültség, de ez csak az erősen görbült vízfelszínre, tehát az igen rövid hullámhosszúságú hullámokra lehet hatással. Ugyancsak figyelmen kívül hagyhatjuk a folyadék belső súrlódását, a viszkózitás jelenségét, ez csak a hullámok csillapodását szabja meg, a terjedésüket csak közvetve befolyásolja.

Ha sikerült meggyőzni magunkat arról, hogy α csak v, g és ϱ függvénye (a dimenzionális megfontolásoknál ez a legkényesebb lépés!), akkor már majdnem célba értünk. Írjuk fel a különböző mennyiségek mértékegységét:$[v] = \mathrm{m/s}$, $[g] = \mathrm{m/s^2}$, $\varrho = \mathrm{kg/m^3}$ és végül $[\alpha] = 1$. A kg mértékegység csak ϱ-ban szerepel, s mivel a keresett szög dimenziótlan, arra kell következtetnünk, hogy α nem függhet ϱ-tól. Hasonló érveléssel adódik, hogy g sem szerepelhet α formulájában, s akkor a v sebesség sem jelenhet meg a képletben. A hullám-ék nyílásszöge tehát

$$\alpha(v, \varrho, g) = \alpha_0 = \text{állandó}$$

kell legyen! Ezt a meglepő következtetést, mármint azt, hogy α egyáltalán nem függhet a hullámforrás sebességétől, a kísérleti adatok is alátámasztják: elegendően nagy felületű és elegendően mély víz felszínén viszonylag gyorsan mozgó test hullámkúpjának szöge a test sebességétől független, s a félszög nagysága kb. 20°. Mozoghat a csónak közepes sebességgel, vagy nagyon gyorsan, végezhetjük a kísérletet a Földön vagy a Holdon, vízben vagy olajban, ez a szög mindig 20° körüli érték lesz. Vajon miért éppen ekkora?

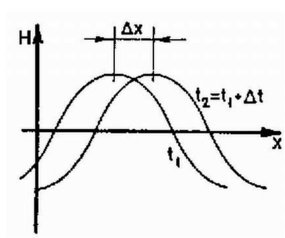
Diszperzió, fázissebesség, csoportsebesség

A továbbiakban le szeretnénk vezetni egy olyan egyenletet, amelyből kiszámítható α_0 számértéke. Ehhez természetesen túl kell lépnünk az egyszerű dimenziós megfontolásokon, és fel kell idéznünk a hullámtan néhány fontos jelenségét, fogalmát. A címben szereplő kifejezések közül a diszperzióról volt már szó, most ismerkedjünk meg másik két fogalommal is. (Azok, akiknek a fázissebesség és a csoportsebesség fogalma, kiszámítási módja jól ismert, nyugodtan átugorhatják ezt a fejezetet.)

Hogyan lehet matematikailag leírni egy hullámot (például a vízfelszín alakját) a t időkoordináta és az x-szel jelölt térbeli koordináta segítségével? Például így:

(2)
$$H(x,t) = A\cos(k \cdot x - \omega \cdot t),$$

ahol H a vízfelszín „kiemelkedési magassága”, A, k és ω pedig állandók. Az A mennyiség a hullám legnagyobb kitérését, a hullám *amplitúdóját* adja meg. A k szám a hullám térbeli periodicitását fejezi ki, neve: *hullámszám*, kapcsolata a λ hullámhosszal: $k = 2\pi\lambda$ (igazoljuk!). Az ω mennyiség az időbeli változás ütemét jellemző körfrekvencia, amely a T periódusidőből az $\omega = 2\pi/T$ képlet segítségével számítható ki (ellenőrizzük!).



3. ábra

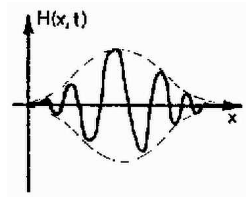
Ha lerajzoljuk a hullámképet valamely t_1 pillanatban, majd egy kicsit későbbi $t_2 = t_1 + \Delta t$ pillanatban *(3 ábra)*, azt látjuk, hogy a hullámhegyek csúcsai egy bizonyos Δx távolsággal odébbtolódtak. Mivel a hullámhegyek csúcsát jól meghatározott „fázisérték” jellemzi (a koszinusz függvény argumentuma 2π egész számú többszöröse kell legyen), (2)-ből leolvasható, hogy $k \cdot \Delta x = \omega \cdot \Delta t$ teljesül. Ebből következik, hogy a hullámok azonos fázisú pontjainak (például a hullám hegyeinek vagy a csomópontjainak) haladási sebessége:

$$v_{\text{fázis}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}.$$

A diszperzió jelensége – vagyis a fázissebesség hullámhossz-függősége – úgy fogalmazható meg, hogy ω valamilyen (általában bonyolult, nemlineáris) függvénye k-nak, s emiatt a

(3)
$$v_{\text{fázis}}(k) = \frac{\omega(k)}{k}$$

is hullámszámfüggő (vagyis hullámhosszfüggő) mennyiség lesz.



4. ábra

Ha különböző hullámhosszúságú (különböző hullámszámú) hullámokat „összeadunk”, egymásra „szuperponálunk”, akkor a végtelen hosszúságban elnyúló szinuszhullám helyett egy véges méretű hullámvonulatot, ún. *hullámcsomagot* kapunk *(4. ábra)*.

Vajon hogyan mozog egy hullámcsomag, hogyan változtatja helyét (és esetleg az alakját) az idő múltával? A hullámvonulat egyes összetevői, elemi szinuszhullámai $v_{\text{fázis}}$ sebességgel haladnak, de a hullámcsomag egészének (átlagos) sebessége ettől eltérő is lehet. Az, hogy mekkora, a következő egyszerű gondolatmenettel deríthető ki.

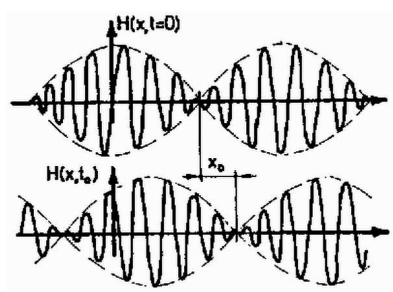
Adjunk össze két azonos amplitúdójú, de *kicsit* eltérő hullámszámú (tehát kicsit eltérő hullámhosszúságú és emiatt kicsit eltérő körfrekvenciájú) hullámot:

$$H(x,t) = A\cdot\cos(k_1x-\omega_1t)+A\cdot\cos(k_2x-\omega_2t).$$

Alkalmazzuk ezekután az ismert $\cos\,\alpha+\cos\,\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot, és használjuk az $(\omega_1+\omega_2)/2=\omega$, $(k_1+k_2)/2=k$, $\omega_1-\omega_2=\Delta\omega$, $k_1-k_2=\Delta k$ jelöléseket. Ezzel a teljes hullámra

(4) $$H(x,t) = 2A\cdot\cos(kx-\omega t)\cdot\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

adódik.



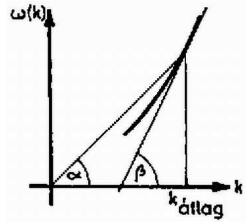
5. ábra

A fenti összefüggésből leolvashatjuk, hogy a szuperpozíció során kialakuló hullámkép olyan hullámcsomagokat tartalmaz, amelyek t_0 idő alatt $x_0=\dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}\cdot t_0$ távolsággal tolódnak odébb *(5.ábra)*, tehát

(5) $$v_{\text{csoport}} = \frac{\Delta\omega(k)}{\Delta k}$$

sebességgel haladnak. A hullámcsomag csoportsebessége az $\omega(k)$ diszperziós függvény „differenciahányadosával”, kicsiny Δk esetén pedig jó közelítéssel $\omega(k)$ deriváltjával egyenlő. (A deriváltat az átlagos hullámszám értékénél kell kiszámítanunk.)

A fenti egyszerű, mindössze két tagból álló szuperpozíciónál a hullámkép nem egyetlen hullámcsomagból, hanem periódikusan ismétlődő csomagokból áll. (Ez a lebegés jelensége a hullámtanban.) Bonyolultabb hullámösszetevéssel valódi hullámcsomag is előállítható, s ennek terjedési sebességére is az (5) egyenlet érvényes.



6. ábra

A kétféle hullámsebesség, a fázis és a csoportsebesség általában különböző nagyságú lehet. A fázissebességet az $\omega(k)$ függvény adott pontbeli (adott k-hoz tartozó) *szelőjének* meredeksége, a csoportsebességet pedig a hullámcsomag *átlagos* hullámszámú pontjához tartozó *érintőjének* meredeksége adja meg *(6. ábra)*:

$$v_{\text{fázis}} = \frac{\omega}{k} = \text{tg } \alpha,$$
$$v_{\text{csoport}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}\text{tg } \beta.$$

Megjegyezzük, hogy fénynél vagy hangnál az $\omega(k)$ függvény jó közelítéssel lineáris, $\omega(k) = c \cdot k$, ahol c egy állandó. Ilyen esetben $v_{\text{fázis}} = v_{\text{csoport}} = c$.

Hajóhullámok és a Thalész-kör

Foglalkozzunk most ismét az eredeti problémánkkal, a vízhullámokkal! Vajon milyen kapcsolat áll fenn a k hullámszám és az ω körfrekvencia között a földi nehézségi erőtér hatására kialakuló ún. *nehézségi vízhullámoknál?* A bonyolult hidrodinamikai számítások helyett hívjuk segítségül ismét a dimenzióanalízis módszerét! Feltételezhetjük, hogy ω a k hullámszámon kívül csak a g nehézségi gyorsulástól függ (gondoljuk végig, mi mástól függhetne még), s mivel $[\omega] = s^{-1}$, $[k] = m^{-1}$, $[g] = m \cdot s^{-2}$, a keresett függvénykapcsolat csakis

(6) $$\omega(k) = A \cdot \sqrt{gk}$$

alakú lehet, ahol A egy dimenziótlan állandó. Részletes számítások szerint $A = 1$. (Felhasználtuk, hogy a víz elég nagy és elég mély, továbbá hogy a hullámok nem nagyon kicsi hullámhosszúságúak, ezért a felületi feszültség nem játszik lényeges szerepet.)

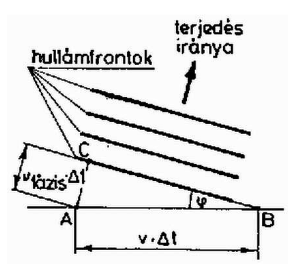
A (6) összefüggésből kiszámíthatjuk a vízhullámok fázis- és csoportsebességét:

$$v_{\text{fázis}} = \frac{\omega}{k} = A \cdot \sqrt{\frac{g}{k}},$$
$$v_{\text{csoport}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = A \cdot \sqrt{g}\frac{\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}}{k_1 - k_2} = \frac{A \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2}} \approx \frac{1}{2} A \cdot \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

A vízhullámok erős diszperziót mutatnak, terjedési sebességük nem adható meg egyetlen számmal, hanem csak egy függvénnyel jellemezhető. Mindkét hullámsebesség arányos a hullámhossz négyzetgyökével, tehát a nagy hullámhosszúságú (lomha) hullámok gyorsabban, a rövidebbek pedig lassabban terjednek. Érdekes és a továbbiak szempontjából fontos észrevétel, hogy a nehézségi vízhullámokra fennáll a

(7) $$v_{\text{csoport}} = \frac{1}{2} v_{\text{fázis}}$$

összefüggés.

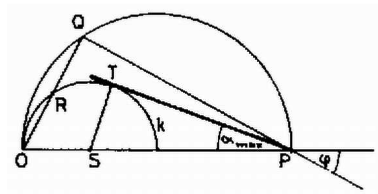


7. ábra

Amikor egy hullámforrás (hajó, csónak, vizisíző) mozog, a mozgása során nem csak egyféle, hanem különböző hullámhosszúságú (hullámszámú) vízhullámokat kelt, s ezek különböző sebességgel terjednek. Válasszunk ki egy bizonyos k hullámszámot, ehhez tartozik egy $v_{\text{fázis}}$ adat, a hullámok azonos fázisú pontjainak haladási sebessége. Ha a hullámforrás v sebességgel halad, akkor egy bizonyos Δt idő alatt a *7. ábrán* látható A pontból az attól $v \cdot \Delta t$ távol levő B pontba jut, az A-ban keltett hullám azonos fázisú pontja pedig a $v_{\text{fázis}} \cdot \Delta t$ távol levő C pontba. A C pontban tehát a B pontbelivel azonos fázisú a hullám, s ez igaz a BC egyenes minden pontjára. A hullámfrontok tehát olyan egyenesek, melyeknek a hullámforrás sebességével bezárt φ szögére fennáll a

(8) $$\sin\varphi = \frac{v_{\text{fázis}}}{v}$$

összefüggés. Mivel a hullám terjedési iránya a hullámfrontokra merőleges, a terjedés iránya a csónak sebességvektorával $\frac{\pi}{2} - \varphi$ szöget zár be. Mivel a $v_{\text{fázis}}$ sebesség függ a hullámszámtól, a különböző hullámhosszúságú elemi hullámok sebességének mind a nagysága, mind pedig az iránya különböző lehet.



8. ábra

Tekintsük most a hullámforrás véges idejű, mondjuk 1 másodpercnyi mozgását. Ha a csónak kezdetben az O pontban volt, és 1 s alatt a P pontba jutott *(8.ábra)*, akkor az O pontban keltett hullámok különböző, a fázissebességüktől függő $\overrightarrow{OQ}$ irányokba indulnak el. A különböző Q pontok egy félkörön, az OP átmérőhöz tartozó Thalészkörön helyezkednek el.

Mindegyik hullámhosszúsághoz (pontosabban fogalmazva: mindegyik hullám- hosszúság-intervallumhoz) tartozik egy bizonyos nagyságú csoportsebesség. Ha egy hullámcsomag átlagos fázissebességével haladva 1 s alatt az O pontból a Q-ba érnénk el, akkor maga a hullámcsomag ennyi idő alatt csak az R pontig jut, ahol (7) miatt $OR = \frac{1}{2} \cdot OQ$. Az R pontok mértani helye tehát egy olyan Thalész-kör, melynek sugara $OS = \frac{1}{4} \cdot OP$.

Gondoljuk azt, hogy a P pontbeli csónakban ülünk, és visszatekintünk a csónak által keltett hullámképre. A különböző (átlagos) hullámhosszúságú hullámcsomagokat a k kör különböző R pontjaiban észleljük, vagyis a csónak haladási irányához képest különböző α szögekben látjuk. Ezen α szögek között van egy legnagyobb, a k-t érintő PT egyenesnek megfelelő $\alpha_{\max}$, amelyre fennáll, hogy

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{TS}{SP} = \frac{1}{3},$$

azaz $\alpha_{\max} = 19,5°$. Ekkora fél-nyílásszögű ék alakjában követik a hullámforrást a vízhullámok, függetlenül a hullámforrás sebességétől.

A tapasztalat szerint az elegendően gyorsan mozgó motorcsónakok, hajók valóban kb. 20°-os félszögű „kúpot" húznak maguk után, összahangban a fenti (először a múlt század végén Rayleigh angol fizikus által kidolgozott) elméleti megfontolásokkal. Kisebb, $0,5$ m/s alatti sebességeknél viszont a hullámkép határozottan eltér az elmondottaktól, az ék szöge a sebesség csökkenésével egyre nagyobbá válik. Ennek az az oka, hogy kis csónaksebességnél a kicsiny fázissebességű, tehát a kicsiny hullámhosszúságú hullámok a leglényegesebbek, ezek terjedését pedig erősen befolyásolja a felületi feszültség.

Dimenzionális megfontolásokból azt kapjuk, hogy a felületi feszültség által létrejövő ún. *kapilláris hullámokra*

$$\omega(k) = \text{állandó} \cdot \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\varrho}}, \tag{9}$$

ahol σ a felületi feszültség, ϱ pedig a víz sűrűsége. Ezeknél a hullámoknál az igaz, hogy $v_{\text{fázis}} \sim \sqrt{k} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, tehát a rövidebb hullámok terjednek gyorsabban. A kapilláris hullámok és a nehézségi hullámok érvényességi tartományának k_0 határát a (6) és a (9) diszperziós reláció összevetéséből kaphatjuk meg (a dimenziótlan állandókat egynek választhatjuk, hiszen nem pontos számítást, csupán nagyságrendi becslést végzünk):

$$\sqrt{\frac{\sigma k_0^3}{\varrho}} = \sqrt{g k_0},$$

ahonnan

$$k_0 = \sqrt{\frac{\varrho g}{\sigma}} \approx 400 \frac{1}{\text{m}},$$

az ennek megfelelő sebesség pedig

$$v_0 \approx \sqrt{\frac{g}{k_0}} \approx 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A csónaksebességtől független hullámkép csak v_0-nál számottevően nagyobb, legalább m/s-os hullámforrás-sebesség esetében várható. Ezt a várakozásunkat igazolják a 137. mérési feladat eredményei is.

Gnädig Péter
ELTE Atomfizikai Tanszék