Az első néhány $24k$ alakú szám kívánt előállítása például a következő:

$$\begin{aligned} k&=1 \qquad 24=3^3+(-1)^3+(-1)^3+(-1)^3\\ k&=2 \qquad 48=4^3+(-2)^3+(-2)^3+0^3,\\ k&=3 \qquad 72=5^3+(-3)^3+(-3)^3+1^3,\\ k&=4 \qquad 96=6^3+(-4)^3+(-4)^3+2^3. \end{aligned}$$

A példák alapján azt reméljük, hogy a $24k$-nak mindig van olyan előállítása, amelyben a

$$(k+2)^3=k^3+3k^2+12k+8$$

köbszám szerepel. Mivel ebből csak $12k$-t kapunk, kellene még egy olyan köbszám, amiből szintén kapunk $12k$-s tagot. Ilyen a

$$(k-2)^3=k^3-3k^2+12k-8$$

köbszám. Ezt hozzávéve a $(k+2)^3$-höz, megvan a $24k$, ráadásul a másodfokú és a konstans tag eltűnik. A kapott $2k^3+24k$ összeghez még $2\cdot(-k)^3$-t adva egy lehetséges előállítást nyerünk:

$$24k=(k+2)^3+(-k)^3+(-k)^3+(k-2)^3.$$

Nagy 983 László (Szekszárd, Rózsa F. Szakközépisk. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$ azonosságból $x+y=2$, $y+z=2$, $z+x=2k$ választással $x+y+z=k+2$, $x=k$, $y=2-k$, $z=k$ adódik, ami szintén a fenti előállítást adja.

Gáti Tamás (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., III. o. t.)

2. A feladat állításánál többet is bizonyíthatunk:

$$(k+1)^3+(k-1)^3+(-k)^3+(-k)^3=6k,$$

tehát már minden 6-tal osztható egész szám is felírható 4 egész szám köbének összegeként.

3. Megmutatjuk, hogy van a fentitől eltérő felbontás is. Keressük azt

$$(a_1k+b_1)^3+(a_2k+b_2)^3+(a_3k+b_3)^3+(a_4k+b_4)^3=24k$$

alakban. Mivel ennek minden k-ra teljesülnie kell, a két polinom azonosságából 4 egyenletet nyerhetünk 8 ismeretlenünkre. Példaként bemutatunk két újabb felbontást, melyeket az egyenletrendszer egy-egy megoldásából kaptunk:

$$(4k+1)^3+(4k-1)^3+(-4k)^3+(-4k)^3=24k,$$
$$(2k+12)^3+(-2k-10)^3+(k+1)^3+(-k-9)^3=24k.$$

Jakab Tibor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)

4. Felmerül a kérdés, hogy egy tetszőleges számot hány köbszám összegeként tudunk előállítani. A válaszra jó becslés adódik az

$$n^3-n=(n-1)n(n+1)$$

azonosság felhasználásával. Itt a jobb oldal mindig osztható 6-tal, így $n=n^3-6k$, tehát a 2. megjegyzésünk alapján minden szám előállítható legfeljebb öt köbszám összegeként. Másrészt rövid számolással igazolható, hogy a $9k\pm4$ alakú számok előállításához 4 köbszámra szükség van, tehát általában 4 köbszámnál kevesebb nem elég.

Nem tudjuk azonban, hogy van-e olyan egész szám, amely nem állítható elő 4 köbszám összegeként. Kérdezhetjük általában, hány k-dik hatvány szükséges ahhoz, hogy tetszőleges egész számot előállítsunk. Belátható például, hogy minden természetes szám felbontható négy négyzetszám összegeként, vagy az, hogy minden természetes szám előállítható 35 negyedik hatvány összegeként. Ez az ún. Waring-kérdéskör, melyről Erdős Pál és Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből című könyvében a 170–187. oldalakon olvashat az érdeklődő olvasó.