A $\sin x$ függvény differenciahányadosa

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}.$$

Itt $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ (gimnáziumi tankönyv III. osztály, 221. old.), emiatt

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{h}{2}}{h}=0,$$

és így

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x.$$

Ez azt jelenti, hogy az $s(x)=\sin x$, $c(x)=\cos x$ függvényekre teljesül (1). Mivel $\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, e függvény deriváltja

$$(\cos x)'=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

Tehát az $s(x)=\sin x$, $c(x)=\cos x$ függvényekre (2) is teljesül. Nyilvánvalóan teljesül rájuk (3) is, nekünk azonban nemcsak azt kell megmutatnunk, hogy ezekre a függvényekre teljesülnek az (1)–(3) feltételek, hanem azt is, hogy ezek a feltételek más függvénypárra nem teljesülhetnek.

Legyen $s(x)$, $c(x)$ tetszőleges függvénypár, amelyre teljesülnek az (1)–(3) feltételek, és tekintsük az $s(x)-\sin x$, $c(x)-\cos x$ különbségeket. Azt kell belátnunk, hogy e különbségek azonosan egyenlőek 0-val, ehelyett azt látjuk be, hogy a négyzetösszegük azonosan 0. Mivel az

$$f(x)=\big(s(x)-\sin x\big)^2+\big(c(x)-\cos x\big)^2$$

függvény értéke $x=0$ mellett 0, a feladatban mondott tétel alapján elegendő, ha megmutatjuk, hogy $f'(x)=0$ minden $x$-re.

Vizsgáljuk meg először, hogy ha $g(x)$ tetszőleges deriválható függvény, deriválható-e a $G(x)=\big(g(x)\big)^2$ függvény, és ha igen, mivel egyenlő a deriváltja. Mivel

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot g\big[(x+h)+g(x)\big]$$

és itt $g$ differenciálhatósága miatt

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x),$$

valamint

$$\lim_{h\to 0}\big[g(x+h)+g(x)\big]=2g(x)+\lim_{h\to 0}h\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=2g(x),$$

tehát $G(x)$ deriválható, és deriváltja $2g'(x)g(x)$. Emiatt $f(x)$ deriválható, és deriváltja

$$f'(x)=2\big(s'(x)-\cos x\big)\big(s(x)-\sin x\big)+2\big(c'(x)+\sin x\big)\big(c(x)+\cos x\big),$$

ami (1), (2) szerint valóban 0.

*Csúri Miklós* (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.* Megoldásunk végén azt is beláttuk, hogy ha $g(x)$ az $a\le x\le b$ intervallumban deriválható, akkor ott folytonos is, hiszen tetszőleges $a\le x\le b$ mellett

$$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)+\lim_{h\to 0}h\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g(x).$$

Ismeretes, hogy a zárt intervallumban folytonos függvények az intervallum belsejében vagy határán a maximumukat is, minimumukat is felveszik (gimnáziumi tankönyv IV. oszt., 89. old.). Ebből következik, hogy ha $g(a)=g(b)$, akkor van olyan $a<x_0<b$ hely, ahol $g'(x_0)=0$, és általában, tetszőleges, az $a\le x\le b$ intervallumban differenciálható $g(x)$ függvényhez található olyan $a<x_0<b$ hely, amelyre

$$g'(x_0)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

teljesül. Ez az ún. Lagrange-féle középérték-tétel, mely a differenciálható függvények vizsgálatának az alapja. A feladatban felhasznált tétel is ebből következik, hiszen e tétel szerint tetszőleges $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ számokhoz található olyan $x_0$, amelyre $x_1 < x_0 < x_2$, és

$$g'(x_0) = \frac{g(x_2) - G(x_1)}{x_2 - x_1},$$

ha tehát $g'(x)$ az $a \leq x \leq b$ intervallumban azonosan 0, akkor tetszőleges $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ mellett $g(x_1) = g(x_2)$, azaz $g(x)$ értéke az $(a,\, b)$ intervallumban állandó. Hasonlóan igazolható, hogy ha $a \leq x \leq b$ mellett $g'(x) > 0$, akkor az $(a,\, b)$ intervallumban $g(x)$ monoton nő, ha pedig ott $g'(x)$ negatív, akkor $g(x)$ monoton fogy (vö. gimnáziumi tankönyv III. oszt., 270–273. old.).