1992. május 20–27. között harmadszor került megrendezésre az 1990-ben (Pataki János kezdeményezésére) elindult izraeli–magyar versenysorozat. A versenyeket felváltva rendezi Magyarország, ill. Izrael. Az idei verseny helyszíne Izrael legjelentősebb természettudományi intézete, a Rehovot-i Weizmann-Intézet volt. A csapatok 4–4 középiskolás diákból, ill. 1–1 vezetőből álltak. A magyar csapat vezetője Pelikán József egy. adjunktus (ELTE, Algebra és Számelmélet Tsz.), az izraelié J. Gillis, a Weizmann-Intézet nyugalmazott professzora volt. (A magyar diákok nevét ld. alább.) A magyar diákokat a versenyre Reiman István tanszékvezető egy. docens (BME, Geometria Tsz.) készítette fel.

Május 22-én egy hagyományos egyéni rendszerű írásbeli verseny került lebonyolításra, ahol a diákoknak 4 óra alatt 4 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat ld. mellékelve.) Mindegyik feladat hibátlan megoldása 7 pontot ért, így max. 28 pontot lehetett szerezni.

A magyar diákok közül *Ujváry-Menyhárt Zoltán* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.) 25 pontot, *Álmos Attila* (Bp., Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.), *Futó Gábor* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) és *Szendrői Balázs* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.) pedig egyaránt 22 pontot ért el.

Az izraeli diákok eredménye 23, 18, 16, ill. 7 pont volt. Összesen tehát a magyar csapat 91, az izraeli 64 pontot szerzett.

Május 25-én egy ebben a versenysorozatban már hagyományosnak számító csapatverseny került lebonyolításra. A diákok egy előre kijelölt témakörből (idén: Fibonacci-számok és általánosításaik, elsősorban Lucas-számok) már korábban otthon felkészülhettek, a versenyen pedig ebből a témakörből 6 – a csapatvezetők által a helyszínen összeállított – feladatot kellett közösen dolgozva 3 és fél óra alatt megoldaniuk. (A feladatokat ld. mellékelve.)

Noha ebben a versenyszámban pontozásos értékelés eleve nem volt tervbe véve, az eredmény önmagáért beszél: mindkét csapat megoldotta mind a 6 feladatot.

A szabadidőben a rendezők gazdag programról gondoskodtak: kirándulás Jeruzsálembe (kétszer is), Tel-Aviv/Yafoba, a Judeai-sivatagba (Maszada erődje), a Holttengerhez, ill. egy kibucba. A hangulat mindvégig rendkívül baráti, szívélyes volt. Mindezért a Weizmann-Intézet, Gillis professzor, ill. a szervezésben „hivatalból” résztvevő többi személy mellett külön köszönet illeti Joel Feldmant, a Weizmann-Intézet magyar származású munkatársát, aki egy héten át kalauzunk és kísérőnk volt.

Az egyéni verseny feladatai (1. nap)

1. *Bizonyítsa be, hogy ha c 1-től különböző pozitív valós szám és n tetszőleges egész, akkor*

$$n^2 \le \frac{c^n + c^{-n} - 2}{c + c^{-1} - 2}.$$

2. *Adott pozitív egész számoknak egy* 1992 *elemű S halmaza, amelyek utolsó számjegyei között mind a* 10 *számjegy előfordul. Bizonyítsuk be, hogy létezik S-nek olyan nem-üres S' részhalmaza, hogy az S'-beli elemek összege osztható* 2000*-rel.*

3. *Adott pozitív egészek* 100 *szigorúan növekvő sorozata:*

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots\}\\
A_2 &= \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \ldots, a_n^{(2)}, \ldots\}\\
&\vdots\\
A_{100} &= \{a_1^{(100)}, a_2^{(100)}, \ldots, a_n^{(100)}, \ldots\}
\end{aligned}$$

Definiáljuk minden pozitív egész n-re és az $1 \le r, s \le 100$ egészekre a következő függvényeket:

$$\begin{aligned}
f_r(n) &= \quad A_r && \text{azon elemeinek száma, melyek } \le n,\\
f_{r,s}(n) &= A_r \cap A_s && \text{azon elemeinek száma, melyek } \le n.
\end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy minden r-re és n-re

$$f_r(n) \ge \frac{1}{2}n.$$

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan (r, s) pár (ahol $r \ne s$), amelyre

$$f_{r,s}(n) \ge \frac{8n}{33}$$

teljesül legalább öt különböző n-re az $1 \le n \le 19920$ intervallumban.

4. *Adott egy P konvex ötszög, melynek minden csúcsa rácspont. Jelöljük Q-val a P ötszög öt átlója által meghatározott konvex ötszöget. Bizonyítsuk be, hogy Q belsejében vagy határán található legalább egy rácspont.*

A csoportverseny feladatai (2. versenynap)

A következő két számsorozatot vizsgáljuk:

1. Fibonacci-számok, definíciójuk:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

2. Lucas-számok, definíciójuk:

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Ismert, hogy minden $n \geq 0$-re:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \qquad L_n = \alpha^n + \beta^n$$

ahol

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A fenti formulák bizonyítás nélkül használhatók, a sorozat minden egyéb olyan tulajdonságát, amit felhasználtok, bizonyítani kell.

⋆

Megoldandó feladatok:

1. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$1 + L_{2^j} \equiv 0 \ (\mathrm{mod} 2^{j+1}) \qquad (j \geq 0).$$

2. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} \left[a^k F_k + \frac{1}{2} \right] = F_{2n+1} \qquad (n \geq 1).$$

3. *Nevezzünk egy nemnegatív egész számot r-Fibonacci számnak, ha felírható r (nem feltétlenül különböző) Fibonacci-szám összegeként ($r \geq 1$).*

Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok olyan szám, ami nem r-Fibonacci szám semmilyen r ($1 \leq r \leq 5$) értékre sem.

4. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$F_{n-1} \cdot F_n \cdot F_{n+1} \cdot L_{n-1} \cdot L_n \cdot L_{n+1} \qquad (n \geq 2)$$

nem teljes négyzet.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$L_{2n+1} + (-1)^{n+1} \qquad (n \geq 1)$$

előáll három (nem feltétlenül különböző) Fibonacci-szám szorzataként.

6. *Egy téglalap csúcsainak valamennyi koordinátája Fibonacci-szám. Feltesszük, hogy a téglalap nem olyan, hogy egy csúcsa az x- tengelyen, egy másik pedig az y- tengelyen lenne. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, vagy pedig $\pm 45°$-os szöget zárnak be a koordinátatengelyekkel.*