Első (iskolai) forduló

I. kategória

1. Két könyvtár közül az egyikben másfélszer annyi könyv van, mint a másikban. Mindkét könyvtár új könyvekkel gyarapodott, 80 illetve 100 darabbal. Ezzel a két könyvtár készleteinek aránya 3 : 4 lett. Hány könyv lehetett eredetileg a két könyvtárban együttvéve?

(10 pont)

2. Az $ABCD$ paralelogramma tetszőleges belső pontja P. Húzzunk P-n át párhuzamosokat az oldalakkal, így a paralelogrammát négy részre vágjuk szét. A négy rész közül háromnak a területét ismerjük, ezek: $15\ \mathrm{cm}^2$, $9\ \mathrm{cm}^2$, $12\ \mathrm{cm}^2$. Mekkora a negyedik rész területe?

(11 pont)

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\operatorname{tg} \mathrm{x} + \operatorname{ctg} \mathrm{x} + 1 = \sin\left(\mathrm{x} + \frac{3\pi}{4}\right).$$

(13 pont)

4. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\log_a 2 + \log_a(4^{x-2} + 9) < \log_a\left(10(1 + 2^{x-2})\right)$$

(„a" valós paraméter).

(13 pont)

5. Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^2 + xy - y = 1992$ egyenletet!

(15 pont)

6. Az ABC háromszögben (a szokásos jelöléseket használva) $\alpha \geq \beta$ és $\alpha \geq \gamma$. Az A csúcsból húzott magasság talppontja D. A k kör érintse a BC oldalt a D pontban, és az AB oldalt M és N, az AC oldalt P és Q belső pontokban messe. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AM + AN}{AP + AQ} = \frac{AC}{AB}.$$

(18 pont)

II. kategória

1. Oldjuk meg a valós számok körében az

$$\log_x(x + y) + \log_y(x + y) = 4,$$
$$(x - 1)(y - 1) = 1$$

egyenletrendszert.

2. Adott az $ABCD$ tetraéder. Határozzuk meg a tetraéder belsejében azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre az $ABCP$ tetraéder térfogata egyenlő az $ABDP$ tetraéder térfogatával!

3. Az egységnyi területű $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ konvex hatszög olyan, hogy az A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_1, A_6A_2 átlóinak felezőpontjai szintén egy konvex hatszög csúcsai. Mekkora ez utóbbi hatszög területe?

4. Határozzuk meg azt a maximális kerületű téglalapot, amelynek két csúcsa egy adott félkör átmérőjére, másik két csúcsa pedig a félkör ívére illeszkedik. A félkör ismeretében adjunk eljárást a maximális kerületű téglalap megszerkesztésére!

5. Az x és y pozitív egész számokra teljesül, hogy $(x-y)^{1992} = (x+y)^{1991}$. Határozzuk meg az xy szorzat legkisebb értékét!

Valamennyi feladat 7 pontot ér.

III. kategória

1. Egy n pozitív egész összes (pozitív) osztójának összegét elosztjuk ugyanezen osztók reciprokainak az összegével. Mit kapunk eredményül?

2. Egy szabályos tetraéder köré írt gömb sugara R. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely a tetraéder három lapját és a tetraéder köré írható gömböt belülről érinti?

3. Bergengóciában háromféle fémpénz van forgalomban, ezek – növekvő értéksorrendben – az *alig*, a *bagó* és a *csenevész*. Márton és Nándor a következő játékot játsszák. Márton elővesz egy általa választott érmét, erre Nándor köteles a másik két fajtából egyet-egyet elővenni. A három érmét egyszerre feldobják, és azé lesz mindhárom érme, akinek az *írásra* esett érméje vagy érméi nagyobb összértéket képviselnek. Ha csupa fej jön ki, akkor mindenki megtartja a saját pénzét (más esetben nem fordulhat elő döntetlen). A fiúk észreveszik, hogy a játék mindig igazságos, akármelyik érmét is veszi elő Márton. Kérdés: hány *aligot* ér egy *csenevész*?

4. Xénia és Olivér az amőba játék alábbi változatát játsszák. Egy (minden irányban végtelen) négyzethálós papíron felváltva Xénia egy tetszőleges négyzetbe egy x jelet ír, illetve Olivér *két* tetszőleges négyzetbe egy-egy $\circ$ jelet ír. Olivér akkor nyer, ha vízszintesen vagy függőlegesen egymás mellett száz $\circ$ jelet elér, egyébként a játék a végtelenségig folytatódik. Meg tudja-e akadályozni Xénia azt, hogy Olivér győzzön?

5. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes olyan megoldását, ahol x, y, s és t racionális számok:

$$t^2 + (s+x)^2 = s^2 + y^2 = (y+t)^2 + x^2.$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.

A verseny második fordulójának feladatai

I. kategória

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y = \log_{(\sqrt{3}-1)}(7 - 2\sqrt{x} - x)$$

egyenletnek a pozitív egész számok halmazán pontosan egy $x; y$ számpár megoldása van!

3. Mennyi az összege azoknak a pozitív, 1-nél kisebb értékű törteknek, melyeknek a nevezője nem nagyobb 1992-nél?

4. Az $ABCD$ négyzet A csúcsából húzott egyik félegyenes a BC oldalt M, a másik félegyenes a CD oldalt N pontban metszi. Jelöljük az AM szakasz és a BD átló metszéspontját P-vel, az AN szakasz és a BD átló metszéspontját Q-val. Az $MAN\sphericalangle$ legyen $45°$. Számítsuk ki az AMN háromszög területét, ha az APQ háromszög területe $20\ \mathrm{cm}^2$.

5. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right).$$

II. kategória

1. Egy N négyjegyű számról a következőket tudjuk: számjegyei 0-tól és egymástól is különbözők; osztható 3-mal; N az összes olyan kétjegyű szám összegének kétszerese, amelyeknek jegyei N számjegyei (a kétjegyű számok között azonos jegyűek is lehetnek). Adjuk meg N-et!

2. Legyenek OAB és $OA'B'$ azonos körüljárású, közös belső pont nélküli szabályos háromszögek. Legyen továbbá az OAB háromszög súlypontja S és az AB' szakasz felezőpontja F. Bizonyítsuk be, hogy az SFA' háromszög derékszögű. Mekkorák a hegyesszögei?

3. Igaz-e, hogy az olyan nyolc csúcsú konvex poliéderek között, amelyek csúcsai egy egység sugarú gömbön vannak, a kocka térfogata a legnagyobb?

4. Az (a_n) sorozat képzési szabálya a következő:

$$a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_{n+1} = a_n\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right), \quad \text{ha} \quad n \geq 1.$$

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n-re

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

III. kategória

A második – egyben döntő – forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely n pozitív egészre

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{5}{12}\right)^{n-2k} = \frac{9}{13}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. Az ABC háromszög beírt körének középpontja K, és ez a kör a BC, AC, ill. AB oldalakat rendre az A_1, B_1, ill. C_1 pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az A_1K és B_1C_1 egyenesek az A-ból induló súlyvonalon metszik egymást.

3. Létezik-e olyan, egész számokból álló halmaz, hogy minden pozitív egész pontosan egyféleképpen áll elő két halmazbeli elem különbségeként?

A verseny harmadik fordulójának feladatai

I. kategória

1. Igazoljuk, hogy az $f: R \to R$, $f(x) = (x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+9$ függvény értékkészletéhez negatív számok nem tartoznak! Van-e a függvénynek zérushelye?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$x, \ y, \ z \ \text{ és } \ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

racionális számok, akkor

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{y}, \quad \sqrt{z}$$

mindegyike racionális szám!

3. Az AE átmérőjű egység sugarú félkörön adottak az AB, BC, CD, DE húrok, amelyeknek a hossza rendre a, b, c, d. (A húrokhoz tartozó köríveknek nincs közös belső pontja.)

Igazoljuk, hogy

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4.$$

II. kategória

1. Állítsuk elő egy racionális p paraméter függvényeként (azaz $r = f(p)$ alakban) az összes olyan r racionális számot, amelyre a $6r^2-5r+9$ egy racionális szám négyzete.

2. Az $ABCD$ tetraéderben $AB \geq CD$, és a többi él nem hosszabb CD-nél. Bizonyítsuk be, hogy a tetraédernek van olyan csúcsa, amelyre illeszkedő 3 élből hegyesszögű háromszög szerkeszthető.

3. Legyenek $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_7$ különböző pozitív egészek. Képezzük az összes $\dfrac{a_i}{(a_i, a_j)}$ alakú számot, ahol (a_i, a_j) az a_i és a_j legnagyobb közös osztója ($i = 1, 2, \ldots, \ 7$; $j = 1, 2, \ldots, 7$). Bizonyítsuk be, hogy az $\dfrac{a_i}{a_i, a_j}$ számok közül a legnagyobb legalább 7.