I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$3\,||x+1|-2|-3=x+1.$$

2. Az $ABCD$ négyzet mindegyik oldalára befelé egyenlő szárú háromszöget rajzolunk. Ezeknek a háromszögeknek a harmadik (X, Y, Z, U) csúcsnál levő szöge 150°. Bizonyítsa be, hogy a négy háromszög területének összege egyenlő az $XYZU$ négyszög területével.

3. Egy háromszög oldalainak hossza egész számokkal adható meg. Egyik oldala a másik két oldal szorzatának felével azonos hosszúságú. Kerülete 18 hosszúságegység. Mekkorák a háromszög oldalai?

4. Antal, Béla és Cili elhatározzák, hogy megoldják egy példatár összes feladatát. Antal a darab feladatot, Béla b darab feladatot és Cili c darab feladatot old meg naponta és minden feladattal csak egyikük foglalkozik. Ha naponta Antal tizenegyszer, Béla hétszer és Cili kilencszer több feladatot oldana meg, akkor öt nap alatt, ha naponta Antal négyszer, Béla kétszer és Cili háromszor több feladatot oldana meg, akkor tizenhat nap alatt fejeznék be munkájukat. Hány nap alatt oldják meg az összes feladatot?

5. Az ABC háromszög A-nál, illetve B-nél levő szöge rendre 20° és 40°. A C csúcsnál levő szög belső szögfelező egyenesén vegyük fel az E pontot úgy, hogy $AB=BE$ teljesüljön. Mekkorák az ABE háromszög szögei?

Haladók (II. osztályosok)

1. Egy szám utolsó jegye a hetvenes számrendszerben hatos. Amikor Jóska átírta a számot tizenötös számrendszerbe, az utolsó jegy négyes lett. Mutassuk meg, hogy Jóska hibázott.

2. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja D, a BC oldal C csúcshoz közelebbi harmadoló pontja pedig E. Milyen arányban osztják egymást az AE és CD szakaszok?

3. Oldjuk meg a valós számok körében a

$$\sqrt{2-\sqrt{x+2}}=x \qquad \text{egyenletet.}$$

4. Egy téglatest nyolc csúcsához hozzárendeltük a pozitív egész számokat egytől nyolcig úgy, hogy a téglatest bármely élének hossza megegyezik az él két végéhez rendelt szám különbségének abszolút értékével. Mekkora a téglatest térfogata?

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapján fekvő C_1 pontra, a BC száron levő A_1 pontra és a CA száron levő B_1 pontra teljesül az, hogy

$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{1}{3},$$

továbbá az $A_1B_1C_1$ háromszög egyenlő szárú és derékszögű. Határozzuk meg az ABC háromszög oldalainak arányát.

6. Hány (x,y) pozitív egész megoldása van a

$$196x^2-225y^2=31^{1991}$$

egyenletnek?

II. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

Az általános tantervű osztályosok feladatai

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:
$|x+2|+p\cdot|x-1|=3$, ha p valós paramétert jelent.

2. Szerkessze meg az ABC háromszöget, ha adott az MA, MC és BC szakaszok hossza, ahol M a háromszög magasságpontja.

3. A k és n pozitív egész számokról azt tudjuk, hogy k a tízes számrendszerben $2n$ jegyű, továbbá k előállítható $n+3$ darab különböző, a tízes számrendszerben n jegyű pozitív egész szám köbének összegeként. Mi lehet a k és az n értéke?

Szakközépiskolások feladatai

1. Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 100 cm, az A és B csúcsnál levő belső szögek felezői egy, a négyszögön kívüli Q pontban metszik egymást. A DC oldal az AQ szakaszt két egyenlő részre osztja. Határozza meg a paralelogramma oldalainak hosszát.

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:
$|x+2| + p \cdot |x-1| = 3$, ha p valós paramétert jelent.

3. Bizonyítsa be, hogy $1991^{1992} - 1$ osztható 7-tel.

A speciális matematika tantervű osztályosok feladatai

1. Szerkessze meg az ABC háromszöget, ha adott az MA, MC és BC szakaszok hossza, ahol M a háromszög magasságpontja.

2. Igazolja, hogy az x, y és z valós számokra akkor és csak akkor teljesül a

$$2(x^4 + x^4 + z^4) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

egyenlőség, ha az x, y és z közül az egyik négyzete egyenlő a másik kettő összegének négyzetével.

3. Igazolja, hogy megadhatók olyan $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{99},\ x_{100}$ valós számok, amelyekre:

$$x_0 = 0, \quad x_{100} = 1 \quad \text{és} \quad 2 \cdot (x_{i-1} + x_{i+1}) = 5x_i, \quad \text{ahol } i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 99.$$

Haladók (II. osztályosok)

1. Hány olyan x egész szám van, amelyre a

$$\sqrt{\frac{5\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} - 32}}$$

kifejezés értelmezve van?

2. Mutassuk meg, hogy bármely öt természetes szám közül mindig kiválasztható két olyan, amelyeknek vagy az összege, vagy a különbsége osztható 7-tel.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden valós x, y számpárra igaz az

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 \geq 0$$

egyenlőtlenség, továbbá egyenlőség csak $x = y = 0$ esetén állhat.

4. Egy háromszög két oldala a és b, a hozzájuk tartozó magasságok h_a és h_b. Tudjuk, hogy $a > b$ és $a + h_a \leq b + h_b$. Határozzuk meg a háromszög harmadik oldalát.

5. Igazoljuk, hogy ha x olyan valós szám, amelyre mind x^{17}, mind x^{27} egész szám, akkor x^{37} is egész szám.