

1. Legyen  $n$  pozitív egész,  $a, b \geq 1, c > 0$  valós számok. Bizonyítandó, hogy

$$\frac{(ab+c)^n - c}{(b+c)^n - c} \leq a^n.$$

**I. megoldás.** A nevező pozitív, mert a feladat feltételei mellett  $b+c > 1$ , és így

$$(b+c)^n \geq b+c > c.$$

Elegendő ennek folytán a nevezővel átszorozva keletkező

$$(1) \quad (ab+c)^n - c \leq a^n(b+c)^n - a^n c$$

egyenlőtlenséget bizonyítani. Ezt teljes indukcióval tesszük. Az  $n=1$  esetben egyenlőség áll fenn.

Jelöljük a bal oldalt  $A_n$ -nel, a jobb oldalt  $B_n$ -nel. Tegyük fel, hogy  $n$ -nek valamilyen  $m$  értékére  $A_m \leq B_m$ , és nézzük meg, mennyivel változik az egyik oldal, mennyivel a másik, ha  $m$ -et eggyel növeljük.

$$\begin{aligned} A_{m+1} - A_m &= (ab+c)^m(ab+c-1). \\ B_{m+1} - B_m &= a^m(b+c)^m(ab+ac-1) - a^m(a-1)c. \end{aligned}$$

Az  $ab+ac-1$  különbségről a könnyebb összehasonlítás érdekében  $ab+c-1$ -re térve, majd az első tag első és második tényezőjét egy hatványá alakítva az utóbbi különbség így írható:

$$\begin{aligned} B_{m+1} - B_m &= a^m(b+c)^m(ab+c-1) + a^m(b+c)^m(ac-c) - a^m(a-1)c = \\ &= (ab+ac)^m(ab+c-1) + a^m(a-1)c[(b+c)^m - 1]. \end{aligned}$$

Itt az első tag nagyobb az  $A_{m+1} - A_m$  különbségnél, ha  $a > 1$ , mert  $ab+ac > ab+c$ , a második pedig pozitív. Így

$$B_{m+1} - B_m > A_{m+1} - A_m, \text{ azaz } B_{m+1} - A_{m+1} > B_m - A_m.$$

Indukciós feltevésünk szerint a jobb oldal nem negatív, így a bal pozitív. Ezzel azt láttuk be, hogy ha (1) teljesül egy  $n$  értékre, és  $a > 1$ , akkor minden nagyobb értékre már szigorú egyenlőtlenség érvényes (1)-ben.

Mivel  $n=1$ -re egyenlőség áll (az eredeti egyenlőtlenségben minden  $a, c$  és 0-tól különböző  $b$  értékre), így (1)-ben és az eredeti egyenlőtlenségben is  $a < 1$  jel érvényes minden 1-nél nagyobb  $n$  egészre és 1-nél nagyobb  $a$ -ra.

Ha  $a=1$ , akkor egyenlőtlenségeink egyenlőségbe mennek át. Ezzel a feladat állítását igazoltuk, és tisztáztuk azt is, hogy milyen esetekben áll fenn egyenlőség.

**II. megoldás.** Feltehetjük, hogy  $n > 1$  és  $a > 1$ , mert  $n=1$  esetén a két oldal egyenlő, bármi is  $a$ , és hasonlóan egyenlőség áll fenn  $a=1$  esetén minden  $n$ -re.

Az (1) egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Rendezzük át a következő módon:

$$(2) \quad c(a^n - 1) \leq [a(b+c)]^n - (ab+c)^n.$$

Alkalmazzuk mindkét oldalra az  $n \geq 2$  esetén érvényes

$$u_n - v_n = (u-v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$$

azonosságot. A jobb oldalon az alapok különbsége  $c(a-1)$ , így a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} c(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) &\leq c(a-1)[(a^{n-1}(b+c)^{n-1} + \\ &+ a^{n-2}(b+c)^{n-2}(ab+c) + \dots + a(b+c)(ab+c)^{n-2} + (ab+c)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Itt a vizsgált esetben  $c(a-1)$  pozitív, a zárójel  $j$ -edik tagjában pedig  $a^j$  a bal oldalon 1-gyel van szorozva, a jobb oldalon viszont

$$ab+c > b+c > 1$$

folytán 1-nél nagyobb számmal. Az utolsó egyenlőtlenség tehát a vizsgált esetekben szigorú egyenlőtlenséggel helyes.

Csupa ekvivalens átalakítást végeztünk, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség is szigorú egyenlőtlenséggel érvényes, kivéve, ha  $n=1$ , továbbá ha  $a=1$ . Ezzel az előző megoldásban is nyert, valamivel élesített állítást nyertük.

*Megjegyzések:* 1. Figyeljük meg, hogy mind a nevező pozitív voltának a belátásánál, mind az (1) egyenlőtlenség bizonyításánál csak annyit használtunk, hogy  $b+c \geq 1, b > 0$ , így elég lett volna csak ennyit tenni fel  $b \geq 1$  helyett.

2. A (2) egyenlőtlenséget beláthatjuk úgy is, hogy a jobb oldalt a binomiális tétel szerint kifejtjük és a  $b$  egyenlő hatványait tartalmazó tagokat összevonjuk. Ekkor a legmagasabbfokú tag kiesik, a következő

$$na^{n-1}b^{n-1}(a-1)c,$$

a többiben pozitív tényezők  $a^k - 1$ -gyel vannak szorozva ( $k = 2, \dots, n$ ), ami pozitív.

A bal oldalt a fenti módon alakítva szorzattá  $(a - 1)c$  szorzója egy  $n$ -tagú összeg, aminek a tagjai  $a$ -nak  $n$ -nél kisebb kitevőjű hatványai, és így nem nagyobbak  $a^{n-1}$ -nél, tehát  $a^{n-1}b^{n-1}$ -nél sem. Az egyenlőtlenség tehát teljesül.

**III. megoldás.** A feladat annak a belátását kívánja, hogy a

$$P(x) = x^n - \frac{(bx + c)^n - c}{(b + c)^n - c}$$

polinom olyan függvényt állít elő, amelyik nemnegatív, ha  $x$  értéke legalább 1.

Ha  $n = 1$ , akkor a 0 polinommal van dolgunk, ha csak  $b \neq 0$ .

Ha  $n \geq 2$ , akkor  $P(1) = 0$ . Így az állítás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy a függvény növekszik,  $x \geq 1$ , ehhez pedig azt, hogy a deriváltja pozitív ezekre az értékekre. A derivált

$$P'(x) = n \left( x^{n-1} - \frac{b(bx + c)^{n-1}}{(b + c)^n - c} \right) = \frac{n(x^{n-1}(b + c)^n - cx^{n-1} - b(bx + c)^{n-1})}{(b + c)^n - c}.$$

A nevezőre a binomiális tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} (b + c)^n - c &= b^n + nb^{n-1}c + \dots + c^n - c > b^n + nb^{n-1}c - c = \\ &= b^n + (nb^{n-1} - 1)c > b^n > 0. \end{aligned}$$

A számlálót így írhatjuk:

$$n \left( b \left[ (bx + cx)^{n-1} - (bx + c)^{n-1} \right] + cx^{n-1} \left[ (b + c)^{n-1} - 1 \right] \right).$$

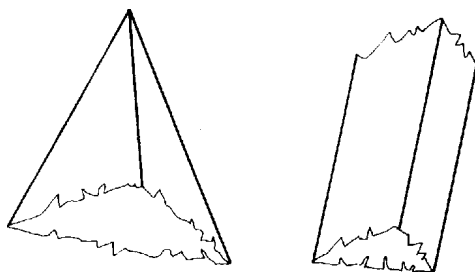
Itt, mivel  $n \geq 2$ ,  $x \geq 1$  és  $b + c > 1$ ,

$$bx + cx \geq bx + c \geq b + c > 1,$$

tehát az első különbség nemnegatív, a második pozitív, és így a számláló is pozitív, tehát  $P'$  is, és ezt akartuk belátni.

*2. Egy konvex testnek két háromszöglapja és három négyszöglapja van. Kössük össze az egyik háromszöglap mindegyik csúcsát a vele szemkötti négyszöglap átlójának metszéspontjával. Bizonyítsuk be, hogy a három egyenes egy ponton megy át.*

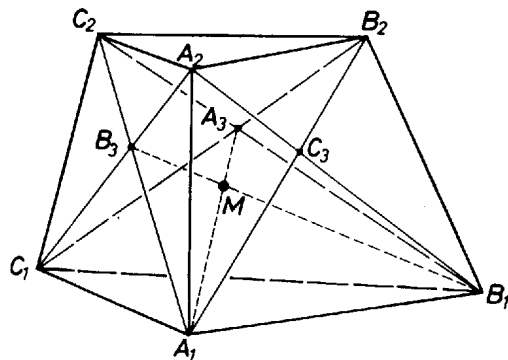
**Megoldás.** Meg kell határoznunk a test alakját. Egy négyszöglap éleihez csatlakozik mind a négy további lap. Mivel a test konvex, így a testet a négyszöglapok síkjai által határolt egyik konvex térrészből a háromszöglapok síkjai metszik ki.



1. ábra

Ez a térrész egy triéder (háromoldalú testszöglet, amelyiknek a lapszögei  $180^\circ$ -nál kisebbek), vagy végtelen, háromoldalú hasáb (1. ábra). Ennek a határlapjain a további két metsző sík között négyszögeknek kell keletkezniük, tehát a két sík metszévonalának a térrészen kívül kell lennie, vagy párhuzamos a két sík. A háromszöglapoknak tehát nincs közös pontja.

Legyenek ezek a lapok  $A_1B_1C_1$  és  $A_2B_2C_2$ , a további élek pedig  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  (2. ábra). Jelöljük a  $B_1B_2C_2C_1$ ,  $C_1C_2A_2A_1$ ,  $A_1A_2B_2B_1$  lapok átlójának a metszéspontját rendre  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$ -mal, és nézzük az  $A_1A_3$ ,  $B_1B_3$ ,  $C_1C_3$  egyeneseket.



2. ábra

Az  $A_1B_1C_2$  síkmetszet  $B_1C_2$  oldalának belső pontja  $A_3$ ,  $A_1C_2$ -nek pedig  $B_3$ , így  $A_1A_3$  és  $B_1B_3$  metszi egymást a háromszög belsejében egy  $M$  pontjában. Hasonlóan látható, hogy  $C_1C_3$  is metszi  $A_1A_3$ -at is,  $B_1B_3$ -at is.

Az  $A_1B_1C_2$  síknak egyik oldalára esik  $C_1$ , a másikra  $A_2$  és  $B_2$ , tehát  $C_1$  és  $C_3$  is ellenkező oldalára esik.  $C_1C_3$ -nak tehát egy közös pontja van a síkkal, és így csak akkor metszheti  $A_1A_3$ -at is,  $B_1B_3$ -at is, ha ez a pont  $M$ . A három egyenes tehát egy ponton megy keresztül, és ezt kellett bizonyítanunk.

*Megjegyzések:* 1. A megoldást többen arra a tételre hivatkozva fejezték be, hogy ha három egyenes páronként metszi egymást, akkor vagy egy síkban vannak, vagy egy ponton mennek keresztül. Ez igaz három helyett akárhány egyenesre, és így látható be. Ha egy ponton mennek át az egyenesek, akkor igaz az állítás. Ha ez nem áll, akkor vegyünk egy  $P$  metszéspontot. Egy  $e$  egyenes, amelyik nem megy át  $P$ -n, a  $P$ -n átmenő egyeneseket (tehát legalább két egyenest)  $P$ -től különböző pontban metsz. Ekkor azonban a  $P$ -n átmenő egyenesek benne vannak a  $P$  és  $e$  által meghatározott síkban. Ebben a síkban minden további egyenes is benne van, hiszen különböző pontokban metsz legalább két  $P$ -n átmenő egyenest.

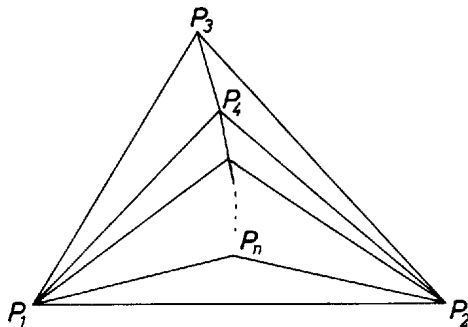
2. A feladat megoldásában valójában három metsző síkról van szó, az  $A_1B_1C_2$  háromszögén kívül az  $A_1B_2C_1$  és az  $A_2B_1C_1$  háromszög síkjáról. A fenti megoldás egy változatához jutunk, ha azt látjuk be, hogy  $A_1A_3$ ,  $B_1B_3$  és  $C_1C_3$  ezek közül rendre két-két sík metszéspontja, és ezek nem lehetnek párhuzamosak.

3. Bár a megoldás során ismételten hivatkoztunk a test konvex voltára, ez többnyire csak bizonyos metszéspontok létrejöttének a biztosításához kellett. Felmerül a kérdés, hogy ez nem biztosítható-e egyszerűbb feltételekkel is. Ennek végiggondolását az olvasóra hagyjuk.

4. A feladat megfogalmazható síkbeli feladatként, csak azt kell figyelembe venni, hogy a test alakját vizsgálva arra jutottunk, hogy  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  és  $C_1C_2$  egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak. A feladat tehát így szól: Az  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  egyenesek egy ponton mennek keresztül, vagy párhuzamosak.  $A_1B_2$  és  $B_1A_2$ ,  $B_1C_2$  és  $C_1B_2$ ,  $C_1A_2$  és  $A_1C_2$  metszéspontját sorra  $C_3$ ,  $A_3$ ,  $B_3$ -mal jelölve bizonyítandó, hogy  $A_1A_3$ ,  $B_1B_3$  és  $C_1C_3$  egy ponton megy keresztül, vagy párhuzamosak. (Feltesszük, hogy  $A_3$ ,  $B_3$  és  $C_3$  létrejön.) Bizonyításra kényelmes út az ábrát egy térbeli alakzat vetületeként felfogni. Egy síkban maradó bizonyítás igen nehéznek látszik.

3. Adott a síkon 998 piros pont, semelyik három nincs egy egyenesen. Ezekhez úgy jelölünk ki kék pontokat, hogy minden olyan háromszög belsejében, amelynek csúcsai piros pontok, legyen kék pont. Melyik az a  $k$  pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy  $k$  kék pont felhasználásával ezt mindig meg lehet tenni, de van a piros pontoknak olyan elhelyezése, aminél  $k - 1$  pont nem elég?

**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy a keresett szám 1991; általában  $n$  piros pont esetén, ahol  $n \geq 3$ ,  $2n - 5$  kék pontra szükség lehet, többre nem.



3. ábra

Először olyan  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  pontrendszert adunk meg, amelyikhez legalább  $2n - 5$  kék pontra van szükség. Egy  $P_1P_2P_3$  háromszögbe rajzoljunk például egy  $P_3$ -ból induló, a  $P_1P_2$  oldal egy belső pontjáiig menő körívet, és ennek a

belsejében jelöljük ki sorra a további  $n - 3$  pontot (3. ábra.) Ekkor a  $P_1P_iP_{i+1}$ ,  $P_2P_iP_{i+1}$  ( $3 \leq i \leq n - 1$ ) és a  $P_1P_2P_n$  háromszögek közül semelyik kettőnek sincs közös belső pontja, tehát mindegyik belsejében kell kék pontnak lennie. Így legalább

$$2(n - 3) + 1 = 2n - 5$$

kék pontra van szükség.

Legyen most  $P_1, P_2, \dots, P_n$  tetszés szerinti piros pontrendszer. Eljárást adunk a kék pontok elhelyezésére. Választunk egy  $e$  egyenest, amelyik nem párhuzamos semelyik  $P_iP_j$  egyenessel, és egy elég kis  $d$  távolságot, például kisebbet az összes piros csúcsú háromszög magasságainál. Ez lehetséges, mert csak véges sok pontpár és véges sok háromszög van.

Húzzunk most mindegyik  $P_i$  ponton át egy  $e$ -vel párhuzamos  $e_i$  egyenest. Ekkor lesz olyan  $e_u$ , amelyiknek az egyik oldalán nincs piros pont, és olyan  $e_v$ , amelyiknek az  $e_u$ -t nem tartalmazó oldalán nincsen.

Ezek az egyeneseken nincs piros pont  $P_u$ -n, illetőleg  $P_v$ -n kívül, mert nincs három egy egyenesen levő piros pont,  $e$  választása szerint pedig ezeken az egyeneseken kettő sem lehet. Minden további  $e_i$  egyenes metszi a  $P_uP_v$  szakaszt, ami a pontrendszer konvex burkának a belsejében halad.

Helyezzünk egy-egy kék pontot minden olyan  $P_i$  kezdőpontú félegyenesre  $P_i$ -től  $d$  távolságban, amelyiknek van közös pontja a konvex burok belsejével. Ezzel a feladat követelményeit teljesítettük. Egy piros csúcsú háromszög csúcsain át húzott egyenesek ugyanis különböznek az oldalegyenesektől. Így az egyik egyenes valamelyik félegyenesének van közös pontja a háromszög belsejével. Az ezen kijelölt kék pont  $d$  választása folytán a háromszög belsejében van.

Számoljuk össze a kék pontokat. Két-két kék pontot helyeztünk a konvex burok belsejében levő piros pontok közelébe, egyet-egyet a konvex burok határán levő piros pontokhoz, kivéve  $P_u$  és  $P_v$ -t, amikhez nem helyeztünk kék pontot. Jelöljük  $b$ -vel a konvex burok csúcsainak számát. A burok oldalszakaszainak belsejében nem lehet piros pont, így a burok belsejében  $n - b$  piros pont van. A kék pontok száma tehát

$$2(n - b) + b - 2 = 2n - b - 2 \leq 2n - 5.$$

Ezzel a bizonyítandó állítás második részét is beláttuk.

*Megjegyzések:* 1. Párhuzamos egyenesek helyett választhatunk egy  $O$  pontot a konvex burkon kívül úgy, hogy ne legyen rajta semelyik  $P_iP_j$  egyenesen se, és az  $e_i = OP_i$  egyeneseken helyezzük el a kék pontokat a fenti előírás szerint.

2. Könnyen látható, hogy az általános esetben is szükség van  $2n - b - 2$  kék pontra. Ez következik, ha belátjuk, hogy bárhogy is bontjuk a pontok konvex burkát olyan háromszögekre, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös belső pontja, a háromszögek száma mindig  $2n - b - 2$ . Ez akkor is igaz, ha lehet kettőnél több pont is egy egyenesen, csak nem mind.

Létezik a kívánt tulajdonságú felbontás. Egy ilyenhez juthatunk például úgy, hogy a pontrendszer konvex burkát háromszögekre bontjuk egy csúcsból induló átlókkal, majd veszünk egy-egy pontot, amelyik nem csúcsa megrajzolt háromszögnek, és összekötjük az őt tartalmazó háromszög vagy háromszögek csúcsaival. Véges számú pont esetén így véges számú lépésben kívánt tulajdonságú felbontáshoz jutunk.

Egy kívánt tulajdonságú felbontás háromszögeinek számát  $h$ -val jelölve ezekben a szögek összege  $h \cdot 180^\circ$ . Ezeknek a szögeknek a csúcsai pontrendszerünk pontjai. A konvex burok belsejében levő pontok mindegyike körül összesen  $360^\circ$  keletkezik (a felbontástól függetlenül). A konvex burok határán levő pontok körül keletkező szögek összege viszont egy  $b$ -szög szögeinek összege<sup>1</sup>, ami  $(b - 2) \cdot 180^\circ$ . Így

$$h \cdot 180^\circ = (n - b) \cdot 360^\circ + (b - 2) \cdot 180^\circ, \quad \text{tehát} \quad h = 2n - b - 2,$$

amint állítottuk.

<sup>1</sup> Ha egy sokszög oldalszakaszain további pontok vannak, és ezeket is csúcsoknak tekintjük egyenként  $180^\circ$  belső szöggel, akkor a szögek összegére vonatkozó formula nyilvánvalóan érvényben marad.