Március 27-én került sor a moszkvai Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára előkészítő második versenyre. A résztvevőknek a következő feladatokat kellett megoldaniuk:

1. Szét lehet-e vágni egy egységkockát 100 téglatestre úgy, hogy a téglatestek köré írt gömbök térfogatainak az összege a kocka köré írt gömb térfogatával legyen egyenlő? Egy ilyen szétvágásnál mekkora lehet maximálisan egy résztéglatest két élének a különbsége?

Megoldás. Megmutatjuk, hogy egy ilyen szétvágásnál a téglatestek szükségképpen kockák. Számozzuk meg a téglatesteket, s legyenek az i-edik téglatest élei a_i, b_i, c_i; ennek térfogata $a_i \cdot b_i \cdot c_i$, köré írt gömbjének a térfogata $\frac{\pi}{6}(a_i^2+b_i^2+c_i^2)^{3/2}$, az egységkocka köré írt gömb térfogata $\frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{27}$.

A feltevés szerint

$$\frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{27} = \sum_{i=1}^{100} \frac{\pi}{6} \cdot (a_i^2+b_i^2+c_i^2)^{3/2} \geq \frac{\pi}{6} \cdot \sum_{i=1}^{100} (3\sqrt[3]{a_i^2 b_i^2 c_i^2})^{3/2} =$$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{27} \cdot \sum_{i=1}^{100} a_i b_i c_i = \frac{\pi}{6} \cdot \sqrt{27} \cdot 1.$$

Az első egyenlőség azt fejezi ki, hogy a téglatestek köré írt gömbök térfogatának az összege egyenlő a kocka köré írt gömb térfogatával. Ezután a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmaztuk az a_i^2, b_i^2, c_i^2 számokra. Az utolsó egyenlőség szerint a téglatestek térfogatának összege az egységkocka térfogatát adja.

Így az egyenlőtlenségnél minden i-re az egyenlőség teljesül, azaz $a_i = b_i = c_i$, a szétvágás összes téglateste kocka. A második kérdésre a válasz tehát nulla.

Előbbi gondolatmenetünk azt is mutatja, hogy ha a szétvágás csupa kockából áll, akkor azok körülírt gömbjei térfogatának összege egyenlő az egységkocka köré írt gömb térfogatával. Elegendő tehát egy 100 kockából álló szétvágást mutatni.

Vágjuk a kockát először 27 egybevágó (1/3 élhosszúságú) kis kockára. Az egyik saroknál ezekből 8-at egy $2/3 \times 2/3 \times 2/3$-os kockává egyesítünk. Eddig 20 kockánk van. Ezek közül kettőt ugyanígy 20 részre vágunk, hatot pedig 8 egybevágó kockára. Az így kapott kockák száma:

$$20 - 2 + 2 \cdot 20 - 6 + 6 \cdot 8 = 100.$$

2. Az $x_1, x_2 \ldots, x_n$ valós számokra $0 \leq x_i \leq 1$ teljesül. Legyen $s_n = x_1 + \ldots + x_n$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq [s_n] + \{s_n\}^2.$$

Megoldás. A bizonyítás történhet például teljes indukcióval; az indukciós lépés igazolása $[s_n] - [s_{n-1}]$ lehetséges értékei szerinti esetszétválasztással könnyen elvégezhető. Most egy másik lehetséges utat mutatunk.

Induljunk ki a következő egyenlőtlenségből: legyen $x_1 \leq x_2, r > 0$; ekkor

$$(x_1 - r)^2 + (x_2 + r)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2r^2 + 2r(x_2 - x_1) > x_1^2 + x_2^2.$$

Ez azt jelenti, hogy ha két szám úgy változik, hogy az összegük állandó, miközben különbségük nő, akkor négyzetösszegük is nő.

Változtassuk most az $x_1 \ldots, x_n$ számokat a következőképpen. Tegyük fel, hogy valamely $i \neq j$-re x_i és x_j egyike sem egész. Tartsuk összegüket állandóan (a kezdeti $x_i + x_j$ értéken), különbségüket pedig növeljük addig, amíg (legalább) egyikük egész nem lesz. Ekkor az új $x_1, \ldots, x_n$ számokra is $0 \leq x_k \leq 1$ teljesül, a négyzetösszegük – vagyis a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala – nőtt, a jobb oldala viszont nem változott. Ismételjük az ilyen lépéseket addig, amíg lehet. Minthogy az $x_1, \ldots, x_n$ közti egészek száma minden lépésben nő, ezért a lépéseket legfeljebb $n-1$-szer hajthatjuk végre. Ekkor már az $x_i (i = 1, \ldots, n)$ számok legfeljebb egy kivétellel egészek. Mivel az egyenlőtlenség bal oldala mindig nőtt, jobb oldala pedig nem változott, ezért ha az átalakítások után fennáll a kérdéses egyenlőtlenség, akkor kiinduláskor is teljesült.

Ha mindegyik x_i egész, akkor $x_i^2 = x_i$, valamint s_n egész; így

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x_1 + \ldots + x_n = s_n = [s_n] = [s_n] + 0 = [s_n] + \{s_n\}^2.$$

Ha a számok egy kivétellel (legyen az például az x_1) egészek, akkor

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x_1^2 + x_2 + \ldots + x_n = x_1^2 + [s_n] = [s_n] + \{s_n\}^2,$$

hiszen $0 < x_1 < 1$ és $x_2 + \ldots + x_n$ egész, tehát $\{s_n\} = x_1, [s_n] = x_2 + \ldots + x_n$.

Ezzel beláttuk, hogy az átalakítások után fennáll az egyenlőtlenség, s az elmondottak alapján ebből már következik, hogy az eredeti számokra is teljesült. Rögtön látható az egyenlőség feltétele is: az x_i számok közül legfeljebb egy nem lehet egész.

3. Adjuk meg azt a legnagyobb páratlan számot, amellyel az alábbi összeg osztható:

$$\sum_{k=0}^{498} \binom{1992}{4k}.$$

Megoldás. Fejtsük ki a következő (komplex számokat is tartalmazó) kifejezéseket a binomiális tétel segítségével:

$$\begin{aligned}
2^n = (1+1)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots, \\
0 = (1-1)^n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots, \\
2^{n/2}[\cos(n \cdot 45^\circ) + i \cdot \sin(n \cdot 45^\circ)] &= \left[\sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)\right]^n = \\
= (1+i)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} i + \binom{n}{4} + \ldots, \\
2^{n/2}[\cos(n \cdot 45^\circ) - i \cdot \sin(n \cdot 45^\circ)] &= \left[\sqrt{2}(\cos 45^\circ - i\ \sin 45^\circ)\right]^n = \\
= (1-i)^n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} i + \binom{n}{4} - \ldots.
\end{aligned}$$

Az n helyébe 1992-t írva, majd összeadva ezt a négy egyenlőséget kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
4 \cdot \left[\binom{1992}{0} + \binom{1992}{4} + \ldots\right] &= 2^{1992} + 2^{996} \cdot 2 \cdot \cos(1992 \cdot 45^\circ) = \\
= 2^{1992} + 2^{997} \cdot \cos(249 \cdot 360^\circ) &= 2^{1992} + 2^{997} \cdot 1 = 2^{997} \cdot (2^{995} + 1).
\end{aligned}$$

Ebből leolvasható, hogy a legnagyobb páratlan osztó a $2^{995} + 1$.