1. Az n oldalú szabályos sokszög egy külső szöge (fokokban mérve) $\dfrac{360^\circ}{n}$. A feltétel szerint $n-18=\dfrac{360^\circ}{n}$, ahonnan $n=30$, hiszen n pozitív egész szám. A szabályos sokszög 30 oldalú.

2. a) Mivel $x^4-6x^2+8=(4-x^2)(2-x^2)$, ezért $\dfrac{x^4-6x^2+8}{4-x^2}<0$ pontosan akkor, ha $2-x^2<0$ és $x^2\neq 4$. Az adott kifejezés értéke akkor negatív, ha $x<-2$, $-2<x<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<x<2$, $x>2$ valamelyike teljesül.

b) $\log_{\frac{1}{2}}\cos x-1<0$ pontosan akkor, ha $\log_{\frac{1}{2}}\cos x<1$. Az $\dfrac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért $\cos x>\dfrac{1}{2}$, tehát

$$-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{\pi}{3}+2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

c)

$$f(x)=|x-2|-|x+2|+x=\begin{cases}x-2-(x+2)+x=x-4, & \text{ha } x\geq 2,\\ -x+2-(x+2)+x=-x, & \text{ha } -2<x<2,\\ -x+2-(-x-2)+x=x+4, & \text{ha } x\leq -2.\end{cases}$$

$f(x)<0$ pontosan akkor, ha vagy $x<-4$, vagy $0<x<4$.

3. A feltétel szerint $a_5=a_1+4d=35$ és $a_{50}=a_1+49d=260$, ezért $a_1=15$ és $d=5$.

Az elhagyott sorozat első eleme 15, differenciája 10, így az első n elem összege $S_1=\dfrac{n}{2}\big[30+(n-1)\cdot 10\big]$.

A megmaradt sorozat első eleme 20, differenciája 10, így az első n elem összege $S_2=\dfrac{n}{2}\big[40+(n-1)\cdot 10\big]$.

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{n+2}{n+3}>1-\frac{1}{1003}\quad\text{ha}\quad 1-\frac{1}{n+3}>1-\frac{1}{1003},\quad\text{azaz ha}$$
$$\frac{1}{n+3}<\frac{1}{1003},\qquad n>1000.$$

A szóban forgó hányados $n>1000$, $n\in\mathbb{N}^+$ számokra nagyobb, mint $1-\dfrac{1}{1003}$.

4. A D csúcspont rajta van a C ponton áthaladó, az AB egyenessel párhuzamos egyenesen, amelynek egyenlete $2x+3y=1$, valamint az A középpontú, $BC=\sqrt{10}$ egység sugarú körvonalon, amelynek egyenlete $(x-2)^2+(y+4)^2=10$.

A CD egyenesnek és a szóban forgó körnek két közös pontja van, $D_1(5;-3)$ és $D_2\left(\dfrac{23}{13};-\dfrac{11}{13}\right)$, a feltételeknek tehát két trapéz felel meg.

5. Emeljük négyzetre az első egyenletet, valamint alakítsuk szorzattá a második egyenlet bal oldalán álló kifejezést

$$x^2+4y^2+4xy=1,$$
$$xy(x^2+4y^2)=-410.$$

Legyen $xy=z$ és $x^2+4y^2=u$, ahol tehát $u\geq 0$. Az új ismeretlenekkel

$$u+4z=1,$$
$$z\cdot u=-410,$$

ahol $u\geq 0$ miatt $z<0$. u kiküszöbölésével

$$4z^2-z-410=0,$$

így $z=-10$.

Az

$$x+2y=1,$$
$$xy=-10$$

egyenletrendszer $x_1=5$, $y_1=-2$ és $x_2=-4$, $y_2=\dfrac{5}{2}$ megoldásai egyben az adott egyenletrendszer megoldásai is.

6. Jelölje a forgáskúp alapkörének sugarát R, magasságát m, alkotójának hosszát a, a gömb sugarát r. A szóban forgó alakzat tengely–síkmetszete $2R$ alapú, m magasságú, a szárú egyenlő szárú háromszög a beírt r sugarú körével, így a kör középpontjából a szárra bocsátott merőleges szakasz hossza r.

Az így keletkezett derékszögű háromszögek hasonlóságából $\frac{a}{R} = \frac{m-r}{r}$, ahonnan $a + R = \frac{mR}{r}$. A két térfogat arányából $\frac{\pi}{3} \cdot R^2 m / (\frac{\pi}{3} \cdot 4r^3) = 3$, ahonnan $R^2 m = 12r^3$.

A forgáskúp és a gömb felszínének aránya az előző összefüggések felhasználásával

$$\frac{R(R+a)\pi}{4r^2\pi} = \frac{R \cdot \frac{mR}{r}}{4r^2} = \frac{R^2 m}{4r^3} = \frac{12r^3}{4r^3} = 3.$$

7. Jelölje a két befogót a és b, az átfogót c. A feltételek szerint

$$a + b + c = \frac{ab}{2} \quad \text{és} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

A c^2-re kapott kifejezéseket egyenlővé téve, majd $a > 0$, $b > 0$-t felhasználva átalakításokkal

$$(a-4)(b-4) = 8 \quad \text{adódik.}$$

a, b, c természetes számok, így $a = b$, valamint $a < 4$, $b < 4$ nem lehetséges. Feltehetjük, hogy $a > b > 4$. Ekkor

$$b - 4 = 1 \quad \text{vagy} \quad b - 4 = 2,$$
$$\text{azaz} \quad b = 5,\ a = 12,\ c = 13 \quad \text{vagy} \quad b = 6,\ a = 8,\ c = 10.$$

A feltételeknek két derékszögű háromszög felel meg, ezek oldalainak hossza 5, 12, 13, illetve 6, 8, 10 egység.

8. Ha $p = 1$, akkor a függvény lineáris, így nincs legnagyobb helyettesítési értéke.

Ha $p \neq 1$, akkor azonos átalakításokkal

$$(1-p)x^2 - 2(2p+1)x - 4p - 1 = (1-p)\left(x - \frac{2p+1}{1-p}\right)^2 - \frac{(2p+1)^2}{1-p} - 4p - 1.$$

A függvénynek $1 - p < 0$ feltétel mellett az $x_0 = \frac{2p+1}{1-p}$ helyen van legnagyobb értéke, ez a legnagyobb érték most 8, tehát

$$-\frac{(2p+1)^2}{1-p} - 4p - 1 = 8, \qquad \text{ahonnan} \;\; p = 10.$$

A függvénynek $p = 10$ esetén 8 a legnagyobb helyettesítési értéke (amit az $x_0 = \frac{7}{3}$ helyen vesz fel).