

1992. február 14-én került sor a moszkvai Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára előkészítő első versenyre. Az olimpia – előzetes értesítés szerint – július 10-e és 21-e között kerül megrendezésre.

A következő példasorban minden egyes kérdésre egy-egy nem negatív egész a válasz, a versenyzőknek csak ezt kellett közölniük. A helyes válaszok a 176. oldalon találhatók.

A verseny feladatai:

1. Adjuk meg az x egész legnagyobb olyan értékét, amelyre $\frac{x^2 + 2}{x + 3}$ is egész.
2. Egy táblára úgy akarunk felírni pozitív egész számokat, hogy ezek bármely részalmazában a számok összege ne legyen osztható 92-vel. Legfeljebb hány számot írhatunk fel, ha egyetlen számot is tekinthetünk összegnek?
3. Mi a harmadik tagja annak a növekvő mértani sorozatnak, amelynek 100 és 1000 közé eső tagjai különböző egészek, és e két határ közé a lehető legtöbb tagja esik, első tagja nagyobb 100-nál?
4. Egy ország közlekedési vállalata bejelenti, hogy az ország 21 városa között n számú autóbuszjáratot létesít; egy járat pontosan két várost köt össze. Legalább mekkora n , ha a lakosság biztos abban, hogy – esetleg átszállásokkal – bármely városból bármely városba el tud jutni a vállalat vonalain?
5. Az $ABCD$ négyzet belső P pontjára $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 3$. Hány fokos az APB ?
6. Hány rácspont van az $ABCD$ paralelogramma belsejében, ha három csúcsa: $A(2; 2)$, $B(4; 1)$, $C(25; 3)$?
7. Egy négyszög oldalainak a hossza, ebben a sorrendben: 5, 7, 12, $2\sqrt{30}$. Hány fokos az átlók hajlásszöge?
8. Legfeljebb hány éle lehet egy 30 csúcsú gráfnak, ha bármely két, éllel összekötött csúcshoz található olyan csúcs, amely a két csúcs egyikével sincs összekötve?
9. a , b , c , d olyan pozitív egészek, amelyekre $a + b = cd$ és $c + d = ab$ teljesül. Mekkora lehet maximálisan $a + b + c + d$?
10. Határozzuk meg $99^{99} - 51^{51}$ utolsó két jegyét!
11. Legfeljebb hány hegyesszöge lehet egy 30 oldalú sokszögnek?
12. Mekkora a

$$\left\{ \frac{1 \cdot 1992 + 100}{121} \right\} + \left\{ \frac{2 \cdot 1992 + 100}{121} \right\} + \dots + \left\{ \frac{121 \cdot 1992 + 100}{121} \right\}$$

összeg, ha $\{x\}$ az x törtrészét jelenti?

13. Az egységkörbe írt szabályos n szög oldala a_n . Határozzuk meg n legkisebb értékét, amelyre $a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{2n}^2$ teljesül.
14. Képezzük az $\{1, 2, 3, \dots, 1991\}$ halmaz összes nem üres részalmazát; az egy részalmazban levő számokat szorozzuk össze és vegyük a szorzat reciprokát, majd ezeket adjuk össze. Mekkora ez az összeg? (Egytényezősszorzatokat is értelmezünk.)
15. Legfeljebb mekkora lehet az $(n^2 + 150)$ sorozat két szomszédos tagjának a legnagyobb közös osztója?