1. A számláló $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot(-6\sqrt{2})=-6\sqrt{2}$, a nevező $-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$, a hányados 6.

2. Jelölje x és y a két alapból az érintési pont és a ferde szár közé eső darabot, $y\geqslant x$. Így a ferde szár $x+y$. Az alapokra merőleges szár $2r=4$, egyben a magasság. A középvonal hossza $\frac{t}{m}=\frac{18}{4}=\frac{1}{2}(2+x+2+y)$, innen $x+y=5$. Az alapok különbsége $y-x=\sqrt{5^2-4^2}=3$, tehát $y=4,\ x=1$. Az alapok 6 és 3, a szárak 4 és 5.

3. A $\sin x=u$ ismeretlenre $4u^2+8u+3=0$, $\quad u_1=-0,5$ és $|u_2|>1$, nem használható.

$$x_1=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\qquad x_2=-\frac{5\pi}{6}+2m\pi,\qquad k,\ m\in\mathbb{Z}.$$

4. A középpont az AB szakasz felező merőlegesére is illeszkedik, egyenlete $(x-1)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-5)^2$, azaz $x+y=6$. A középpont: $K(4,2)$, a sugár $KA=3$, a kívánt egyenlet: $(x-4)^2+(y-2)^2=9$, másképpen: $x^2+y^2-8x-4y+11=0$.

5. A logaritmusnak csak akkor van értelme, ha $x>0$ és $x\neq 1$. A jobb oldal akkor nem negatív, ha $y=\lg_2 x<0$, azaz $0<x<1$.

$$\lg_x 4=\lg_x 2^2=2\lg_x 2=\frac{2}{\lg_2 x}=\frac{2}{y}.$$

A $2+\frac{2}{y}=\frac{12}{y^2}$ egyenletből $\frac{1}{y}=\frac{2\pm 10}{24}$. Csak az egyik gyök negatív, $\lg_2 x=-\frac{1}{3}$, $\quad x=\frac{1}{8}$.

6.

$$\frac{2}{3}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\cos\beta\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=$$
$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}=\frac{a^2+c^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}.$$

Hasonlóan

$$\frac{2}{4}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma}=\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}.$$

E két egyenletből $5a^2-5b^2+c^2=0$ és $3a^2+b^2-3c^2=0$. (A harmadik ilyen egyenlet nem független ezektől.) A két egyenletből az ismeretlenek arányát lehet meghatározni: $a^2:b^2:c^2=7:9:10$, tehát $a:b:c=\sqrt{7}:3:\sqrt{10}$.

7. Legyen ABP a P-nél derékszögű háromszög, és P az AB egyenessel kettévágott sík C-t nem tartalmazó félsíkján van. A P-nél lévő szög felezője átmegy az ABP háromszög köré írt körből a másik félsíkon lévő AB ív K felezőpontján, így lesz az AK és BK ívek egyenlősége miatt $APK\sphericalangle=BPK\sphericalangle$. (Ez tetszőleges háromszögben igaz.) A mi esetünkben K az AB átmérő fölé befelé írt félkörív felezőpontja, ABK egyenlő szárú derékszögű háromszög, vagyis K a négyzet átlóinak metszéspontja, szimmetriaközéppontja. A négyzetnek a felező két oldalán lévő darabjai egybevágók, egyenlő területűek.

8. A feltétel mellett

I. vagy $x=y$ $\qquad\qquad$ II. vagy $x=-y$,

az egyenlőtlenség bal oldala így egyszerűsödik:

$$(8+p)x^2-2x+\frac{1}{16}.\qquad\qquad (8-p)x^2+\frac{1}{16}.$$

Ezek akkor nem negatívok, ha egyrészt x^2 együtthatója pozitív, azaz

$$p>-8\qquad p\leq 8,$$

és ez a II. esetben elegendő is. Az I. esetben az is kell, hogy a diszkrimináns határozattan negatív legyen, azaz $4-\frac{8+p}{4}<0$, $\quad p>8$.

Mivel p-re mind a három feltételnek teljesülnie kell, ezért az egyetlen szóba jövő érték p=8, ekkor a megadott egyenlőtlenség $\left(2(x+y)+\frac{1}{4}\right)^2\geq 0$ alakú.