A háromszög és a tetraéder geometriájában számos párhuzam fedezhető fel. A háromszögekre vonatkozó tételek tekintélyes részének a megfelelője megtalálható a tetraéderek körében is. Egyik legjellegzetesebb példája ennek a tetraéderbe írt gömb sugarának a meghatározása, amely pontosan ugyanazt az utat követi, mint a háromszögbe írt kör sugarának a kiszámítása, és ennek megfelelően a két eredmény szerkezete is megegyezik; a háromszögbe írt kör r sugara:

$$r = \frac{2t}{k},$$

ahol t a háromszög területe, k pedig a kerülete; a tetraéderbe írt gömb ϱ sugara:

$$\varrho = \frac{3V}{A},$$

ahol a V a tetraéder térfogata, A pedig a felszíne.

Ugyanekkor azt is meg szokták említeni, hogy ezt a párhuzamot már nem találjuk meg, ha a háromszög köré írt kör, ill. a tetraéder köré írt gömb sugarát akarjuk kifejezni a háromszög, ill. a tetraéder néhány jellegzetes alapadatának a segítségével.

A következőkben mégis megadunk e két sugártípusra egy szerkezetileg teljesen hasonló kiszámítási módot, a háromszögnél ez némileg bonyolultabb a szokásos eljárásnál.

Felhasználunk egy egyszerű (kettős) segédtételt:

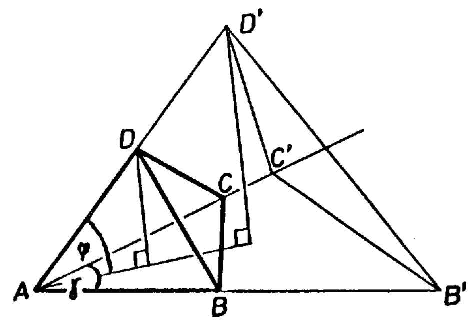
1. Ha az ABC háromszögnél a B' ill. C' az A-ból induló oldalakat tartalmazó félegyeneseknek egy-egy pontja, akkor az ABC háromszög t és az $AB'C'$ háromszög t' területének az aránya:

$$t : t' = AB \cdot AC : (AB' \cdot AC').$$

2. Ha az $ABCD$ tetraédernél B', C', D' az A-ból induló éleket tartalmazó félegyenesek egy-egy pontja, akkor az $ABCD$ tetraéder V és az $A'B'C'D'$ tetraéder V' térfogatának az aránya:

$$V : V' = AB \cdot AC \cdot AD : (AB' \cdot AC' \cdot AD').$$

Az első rész állítása közvetlenül következik abból, hogy $2t = AB \cdot AC \sin\gamma$ és $2t' = AB' \cdot AC' \sin\gamma$, ahol $\gamma = BAC\sphericalangle$.

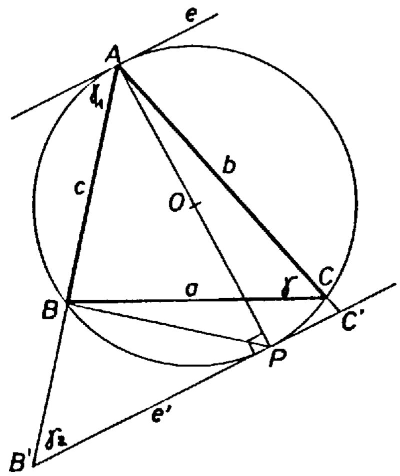


1. ábra

A második résznél figyeljük meg *(1. ábra)*, hogy ha $BAC\sphericalangle = \gamma$ és az AD félegyenes az ABC síkkal φ szöget zár be, akkor a két tetraédernél az alapháromszögek területei $\frac{1}{2}AB \cdot AC \sin\gamma$, ill. $\frac{1}{2}AB' \cdot AC' \sin\gamma$, a hozzájuk tartozó magasságok $AD \sin\varphi$, ill. $AD' \sin\varphi$, ezért térfogataik:

$$V = \frac{1}{6}AB \cdot AC \cdot AD \sin\gamma \;\sin\varphi \quad \text{és} \quad V = \frac{1}{6}AB' \cdot AC' \cdot AD' \sin\gamma \;\sin\varphi,$$

amiből már közvetlenül következik a segédtétel állítása.



2. ábra

A háromszög köré írt kör R sugarának a kiszámításához válasszuk ki a háromszög egy olyan csúcsát, amelyből induló oldalak egyike sem tartalmazza a kör O középpontját (a *2. ábrán* ez az A csúcs); a háromszögnél a szokásos jelöléseket alkalmazzuk. Az A-ból induló körátmérő másik végpontja legyen P. A P pontbeli e' körérintő az AB, ill. AC oldalegyeneseket a B', ill. C' pontokban metszi, e' nyilván párhuzamos a kör A pontbeli érintőjével, e-vel. A kerületi szögek tétele szerint e az AB oldalegyenessel a γ-val egyenlő γ_1 szöget zárja be, viszont $\gamma_1 = AB'C'\sphericalangle = \gamma_2$, mivel váltószögek. Így az ABC és $AC'B'$ hasonló háromszögek, minthogy két-két szögük egyenlő; hasonlóságukból következik, hogy megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{a}{B'C'} = \frac{c}{AC'}, \qquad B'C' = \frac{a \cdot AC'}{c}.$$

Az APB' derékszögű háromszögben PB merőleges AB'-re, mivel AP körátmérő, PB tehát az átfogóhoz tartozó magasság. A befogó-tétel szerint $4R^2 = c \cdot AB'$; hasonlóan kapjuk az APC' derékszögű háromszögből, hogy $4R^2 = b \cdot AC'$, ezekből

$$AB' = \frac{4R^2}{c}, \quad AC' = \frac{4R^2}{b}, \quad \text{és így} \quad B'C' = \frac{4R^2 \cdot a}{bc}. \tag{1}$$

Segédtételünk 1. részéből következik, hogy ha ABC területe t, $AB'C'$ területe pedig t', akkor

$$t' = \frac{tAB' \cdot AC'}{bc}.$$

Viszont az $AB'C'$ háromszögben a $B'C'$ oldalhoz tartozó magasság $AP = 2R$, ezért

$$t' = B'C' \cdot R.$$

E két területkifejezés jobb oldalai tehát egyenlők, végezzük el bennük az (1)-ből adódó helyettesítéseket:

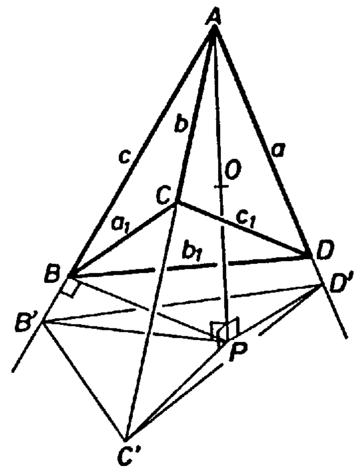
$$\frac{t}{bc} \cdot \frac{4R^2}{c} \cdot \frac{4R^2}{b} = \frac{4R^3 \cdot a}{bc},$$

egyszerűsítések és rendezés után ebből a jól ismert

$$R = \frac{abc}{4t}$$

képletet kaptuk.

Térjünk most rá a tetraéder köré írt gömb sugarának a meghatározására. Legyen az $ABCD$ tetraéder térfogata V, a köré írt gömb középpontja O, sugara R; vezessük be továbbá az $AB = c$, $CD = c_1$, $AC = b$, $BD = b_1$, $AD = a$, $BC = a_1$ jelöléseket (tehát a tetraéder szemközti éleit jelöljük ugyanazzal a betűvel).



3. ábra

Vizsgálataink egyszerűsítése céljából válasszuk ki a tetraéder egy olyan csúcsát, amelyen átmenő élek egyike sem tartalmazza O-t, legyen ez A *(3. ábra)*. Az A-n átmenő gömbátmérő A-val ellentétes végpontja legyen P. A gömb P pontbeli érintősíkja az AB, AC, AD egyeneseket rendre a B', C', D' pontokban metszi. Mivel az érintősík merőleges AP-re, az APB', APC', APD' derékszögű háromszögek.

Minthogy AP gömbátmérő, AB merőleges PB-re, ezért az APB' derékszögű háromszögben PB az átfogóhoz tartozó magasság.

Alkalmazzuk erre a háromszögre a befogó-tételt:

$$AB \cdot AB' = AP^2, \quad \text{azaz} \quad c \cdot AB' = 4R^2,$$

ebből:

$$AB' = \frac{4R^2}{c}, \tag{2}$$

hasonlóan kapjuk:

$$AC' = \frac{4R^2}{b} \quad \text{és} \quad AD' = \frac{4R^2}{a}. \tag{3}$$

Ebből is következik, hogy az ABC és $AC'B'$ háromszögek hasonlók, mivel (2)-ből és (3)-ból

$$\frac{c}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC'}{AB'}$$

adódik, a két háromszög tehát megegyezik egy szögben és az azt közrefogó oldalak arányában. A hasonlóság következménye, hogy

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AC'},$$

vagyis (3) felhasználásával

$$\frac{a_1}{B'C'} = \frac{cb}{4R^2},$$

azaz

$$B'C' = \frac{4R^2}{abc} aa_1,$$

hasonlóan kapjuk:

$$C'D' = \frac{4R^2}{abc} cc_1$$

és

$$D'B' = \frac{4R^2}{abc} bb_1.$$

Eredményünk azt jelenti, hogy

(*) *létezik olyan H háromszög, amelynek oldalai aa_1, bb_1, cc_1,* hiszen $B'C'D'$-re $\frac{abc}{4R^2}$ arányú hasonlóságot alkalmazva éppen a H háromszöget kapjuk meg. Ha H területét T-vel jelöljük, $B'C'D'$ területe:

$$\frac{16R^4}{a^2b^2c^2}T.$$

Segédtételünk 2. része szerint az $AB'C'D'$ tetraéder térfogata (2) és (3) felhasználásával

$$V' = \frac{V \cdot AB' \cdot AC' \cdot AD'}{abc} = \frac{V \cdot 64R^6}{a^2b^2c^2}.$$

Viszont az $AB'C'D'$ tetraéder $B'C'D'$ lapjához $2R$ hosszúságú magasság tartozik, ezért térfogata, V' az alapterületből és a magasságból kiszámítható:

$$V' = \frac{16R^4 \cdot T}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{2R}{3} = \frac{32R^5T}{3a^2b^2c^2}.$$

A térfogat két kifejezésének egyenlőségéből kapjuk,hogy

$$\frac{V{\cdot}64R^6}{a^2b^2c^2} = \frac{32R^5T}{3a^2b^2c^2},$$

amiből a tetraéder köré írt gömb sugárképlete: $R = \frac{T}{6V}$.

A képletnek ezt a formáját von Staudt (1798–1867) német matematikusnak tulajdonítják. Eszerint:

a tetraéder köré írt gömb sugárhosszát úgy kapjuk meg, hogy annak a háromszögnek a területét, amelynek oldalai a szemközti élek szorzatával egyenlő, elosztjuk a tetraéder térfogatának a hatszorosával.

Megjegyzések: 1. A háromszög köré írt kör sugárképletét úgy is felfoghatjuk, hogy a sugarat a háromszög oldalaival fejezzük ki, hiszen a terület Heron képlete alapján az oldalakból kiszámítható.

Ugyanez a tetraéder sugárképletéről is elmondható, mivel a tetraéder térfogata kifejezhető az élek segítségével. Ezt a nem túl egyszerű kifejezést determináns alakjában szokás megadni (l. pl. Hajós György: Bevezetés a geometriába, 318 old.).

2. Levezetéseinkben a P pont kiválasztására vonatkozó kikötés nem lényeges, a P bármelyik csúcson átmenő átmérő végpontja lehet.

3. Meggondolásainkban egyes részeredmények a térgeometria több érdekes mozzanatára világítanak rá. A tetraéder köré írt gömb csúcsokhoz tartozó érintősíkjaival párhuzamos síkok mind a H háromszöghöz hasonló háromszögben metszik a tetraédert. A *3. ábrán* észrevehetjük, hogy a $BCC'B'$ és $DCC'D'$ négyszögek húrnégyszögek. Ebből következik, hogy a BCD és $B'C'D'$ háromszögek egy gömbön vannak, és minden olyan gömb, amely a tetraéder valamelyik lapháromszögének három csúcsán átmegy, a háromszögön kívüli élekből H-hoz hasonló háromszöget metsz ki.

A $(*)$-gal jelzett eredményünk egy érdekes következménye: Ha P az ABC szabályos háromszög síkján kívüli pont, akkor a PA, PB, PC, szakaszokból mindig szerkeszthető háromszög. (Könnyen bizonyítható, hogy ez csak szabályos háromszögre igaz).

Ha a tetraéder lapjai egybevágó háromszögek (egyenlő oldalú tetraéder), akkor szemközti élei szükségképpen egyenlő hosszúak. $(*)$ ebben az esetben azt mondja ki, hogy ha a tetraéder lapjainak oldalhosszai a, b, c, akkor létezik a^2, b^2, c^2 oldalú háromszög is. Ez azonban azt jelenti, hogy pl. $a^2 + b^2 > c^2$, ami egyenértékű azzal, hogy az a és a b oldalak szöge hegyesszög, tehát az egyenlő oldalú tetraéder lapjai szükségképpen hegyesszögű háromszögek.

4. Felmerül a kérdés, hogy fel lehet-e venni a tetraéder élein egy-egy belső pontot úgy, hogy az egy csúcsból induló éleken lévő pontok egy H-hoz hasonló háromszög csúcsai legyenek. Ha ez lehetséges, akkor a hat felvett pont konvex burka egy nyolc háromszöggel határolt test (négyszögre épített kettős gúla, ún. általános oktaéder), amelynek négy lapja H-hoz hasonló. Megmutatható, hogy ez lehetséges abban az esetben, ha a tetraéder magasságpontos (ortocentrikus), azaz magasságai egy ponton mennek át és lapjai hegyesszögű háromszögek. Ennek az oktaédernek érdekes tulajdonsága, hogy a szóban forgó tetraéderbe írható oktaéderek közül ennek az élösszege a legkisebb.